

Géométrie dans les tores

Dans ce TIPE, on étudie une famille d'espaces métriques dont les espaces topologiques associés sont des tores. On introduit des notions de géométrie dans un espace métrique en définissant synthétiquement deux relations qualifiées de "géométriques" à partir d'énoncés faisant intervenir la métrique.

Ces relations coïncideraient dans le plan euclidien avec les relations de "congruence" et "betweenness" utilisées par Alfred Tarski dans son axiomatisation de la géométrie élémentaire euclidienne.

Le langage du premier ordre sur la signature comportant exactement deux symboles de relations d'arité adaptées, noté \mathcal{L} , permet d'associer à tout espace métrique l'ensemble de ses théorèmes dans \mathcal{L} , qu'on appellera communément "géométrie de l'espace métrique" sans bien sûr signifier qu'elle se réduit à cet ensemble ni même qu'elle s'y exprime convenablement pour tout espace métrique.

C'est cependant le cas en ce qui concerne le plan normé, et on peut considérer qu'il en est de même pour les tores étudiés qui en sont très proches. L'un d'entre eux, appelé "tore euclidien", particulièrement proche du plan euclidien, fera l'objet d'une étude plus précise.

Le TIPE suit deux démarches.

La première est de caractériser algébriquement l'existence d'isomorphismes de \mathcal{L} -structures entre ces tores. La seconde est de caractériser l'équivalence élémentaire d'un espace métrique vu comme \mathcal{L} -structure et du tore euclidien : on montre que les modèles de sa géométrie qui sont des espaces métriques s'y plongent.

Dans ces deux approches, le calcul de groupes d'isométrie se révèle un outil puissant pour parvenir à ces résultats concernant \mathcal{L} au moyen de raisonnements algébriques. Ainsi le début du TIPE est consacré à la présentation du contexte et la définition de la famille de tores, ainsi qu'à l'établissement d'un lien entre le groupe d'isométrie et la géométrie d'un espace métrique, et au calcul des groupes d'isométrie des tores étudiés.

Une annexe consistant en un code Caml fait aussi partie du travail, elle est présentée dans le fichier *Principe du programme*.

Sommaire :

- I - Géométrie dans les espaces métriques
- II - Tores étudiés
- III - Calcul des groupes d'isométrie
(Annexe : calcul informatique des groupes d'isométrie de tores à distances "polygonales")
- IV - Interprétation et applications
- V - Géométrie du tore euclidien
(Vbis : fin de la preuve du théorème V)

Il est possible de suivre indépendamment les deux démarches que comporte ce TIPE : pour la première lire les parties I, II, III et IV ; pour la seconde, lire I, II, V et Vbis et parcourir le paragraphe de la partie III concernant les notations des isométries du tore euclidien.

I - Géométrie dans les espaces métriques

1 - Groupe d'isométrie

Soit (X, δ) un espace métrique.

On appelle **isométrie** de (X, d) une bijection $f : X \rightarrow X$ telle que $\forall (a, b) \in X^2, d(f(a), f(b)) = d(a, b)$.

L'ensemble $\mathcal{G}(X, \delta)$ des isométries de (X, δ) muni de la loi \circ de composition des applications $X \rightarrow X$ est un groupe de neutre Id_X que l'on appellera le **groupe d'isométrie** de (X, δ) .

On suppose ici (X, δ) compact.

Soient $f, g \in \mathcal{G}(X, \delta)$.

L'application $x \in X \rightarrow \delta(f(x), g(x))$ est continue par composition d'applications continues. (X, δ) étant compact, cette application est bornée et atteint ses bornes.

On définit la distance entre f et g comme $\Delta(f, g) = \text{Max}(\{\delta(f(x), g(x)) \mid x \in X\})$.

On note encore $\mathcal{G}(X, \delta)$ l'espace métrique $(\mathcal{G}(X, \delta), \Delta)$ ainsi que l'espace topologique induit.

Proposition I.1

Soit (X, δ) un espace métrique compact.

$\mathcal{G}(X, \delta)$ est un groupe topologique.

Preuve :

★ Soient $(f_1, f_2), (g_1, g_2) \in \mathcal{G}(X, \delta)^2$.

Soit $x \in X$.

$$\delta(f_1 \circ f_2(x), g_1 \circ g_2(x)) \leq \delta(f_1 \circ f_2(x), f_1 \circ g_2(x)) + \delta(f_1 \circ g_2(x), g_1 \circ g_2(x)).$$

$$\delta(f_1 \circ f_2(x), g_1 \circ g_2(x)) \leq \delta(f_2(x), g_2(x)) + \delta(f_1 \circ g_2(x), g_1 \circ g_2(x)).$$

$$\delta(f_1 \circ f_2(x), g_1 \circ g_2(x)) \leq \Delta(f_2, g_2) + \Delta(f_1 \circ g_2, g_1 \circ g_2) \leq \Delta(f_2, g_2) + \Delta(f_1, g_1)$$

$$\text{Donc } \Delta(f_1 \circ f_2, g_1 \circ g_2) \leq \Delta(f_1, g_1) + \Delta(f_2, g_2) \leq 2\text{Max}(\Delta(f_1, g_1), \Delta(f_2, g_2)).$$

Donc \circ est 2-lipschitzienne donc continue.

★ Soient $f, g \in \mathcal{G}(X, \delta)$.

Soit $x \in X$.

On pose $y = g^{-1}(x)$.

$$\delta(f^{-1}(x), g^{-1}(x)) = \delta(f^{-1} \circ g(y), y) = \delta(g(y), f(y)) \leq \Delta(g, f).$$

De même, $\Delta(f, g) \leq \Delta(g^{-1}, f^{-1})$ donc il y a égalité : l'opération de symétrisation est une isométrie de $\mathcal{G}(X, \delta)$ donc une application continue.

On peut en outre montrer que $\mathcal{G}(X, \delta)$ est compact mais cela sera inutile dans la suite.

Soient (X, δ_X) et (Y, δ_Y) deux espaces métriques compacts.

S'il existe un isomorphisme de groupes topologiques $\mathcal{G}(X, \delta_X) \rightarrow \mathcal{G}(Y, \delta_Y)$, on note $\mathcal{G}(X, \delta_X) \cong \mathcal{G}(Y, \delta_Y)$.

2 - Relations et langage géométriques

1) Relations, transferts

La relation quaternaire \equiv sur X définie par $\forall(x, y, z, t) \in X^4, \equiv xyzt \iff \delta(x, y) = \delta(z, t)$ est appelée **relation de congruence** sur (X, δ) .

On notera $xy \equiv zt$ plutôt que $\equiv xyzt$.

La relation ternaire $\dashv\dashv$ sur X définie par $\forall(x, y, z) \in X^3, \dashv\dashv xyz \iff \delta(x, z) = \delta(x, y) + \delta(y, z)$ est une relation que l'on appellera **relation d'interposition** sur (X, δ) .

Soient (X, δ_X) et (Y, δ_Y) deux espaces métriques, $\equiv_X, \equiv_Y, \dashv\dashv_X, \dashv\dashv_Y$ les relations associées.

On appelle **transfert** de (X, δ_X) vers (Y, δ_Y) toute bijection $f : X \rightarrow Y$ telle que

$$\forall x, y, z, t \in X, xy \equiv_X zt \iff f(x)f(y) \equiv_Y f(z)f(t).$$

$$\forall x, y, z \in X, \overline{xyz}_X \iff \overline{f(x)f(y)f(z)}_Y.$$

On note alors $f : X \hookrightarrow Y$.

En particulier, une isométrie entre deux espaces métriques est un transfert, mais un transfert n'est pas nécessairement une isométrie.

On parlera de 1-transfert si f conserve les congruences, et de 2-transfert si f conserve les interpositions; de sorte qu'une application est un transfert si et seulement si elle est un 1-transfert et un 2-transfert.

2) Langage géométrique

On note \mathcal{L} le langage du premier ordre de signature $\langle \equiv, \dashv\dashv \rangle$.

Tout espace métrique (X, δ) induit une réalisation $(X, \equiv_X, \dashv\dashv_X)$ de \mathcal{L} qu'on associera à X .

Pour une formule F de \mathcal{L} , la notation $F[a_1, \dots, a_n]$ signifie que a_1, \dots, a_n sont les variables libres de F .

$X \models F$ signifie que $(X, \equiv_X, \dashv\dashv_X)$ satisfait F .

On considère que \mathcal{L} est le langage dans lequel on exprime la géométrie des espaces métriques. On parlera de "géométrie d'un espace métrique" pour désigner l'ensemble des formules clauses de \mathcal{L} satisfaites par la réalisation de \mathcal{L} associée à l'espace en question, c'est-à-dire $Th(X, \equiv_X, \dashv\dashv_X)$.

Par ailleurs, les transferts entre espaces métriques ne sont autres que les isomorphismes de \mathcal{L} -structures.

Proposition I.2

Soient (X, δ_X) et (Y, δ_Y) deux espaces métriques et $f : X \hookrightarrow Y$.

Soit $F[a_1, \dots, a_n]$ une formule de \mathcal{L} .

Pour tout n -uplet $(x_1, \dots, x_n) \in X^n$, $X \models F[x_1, \dots, x_n] \iff Y \models F[f(x_1), \dots, f(x_n)]$.

Une démonstration de ce résultat, qui est le résultat de base concernant les isomorphismes de structures, se trouve dans *Logique mathématique (tome 1)* de René Cori et Daniel Lascar.

On peut se demander s'il est judicieux de parler de géométrie d'un espace métrique quelconque (puisque'elle risque d'être inexistante) et de restreindre sa géométrie à ses théorèmes dans \mathcal{L} .

Je pense que cette démarche a du sens dans les espaces possédant justement une affinité avec la géométrie, ce qui est le cas des tores algébriques. La géométrie euclidienne élémentaire a été axiomatisée avec succès dans le langage \mathcal{L} et cette axiomatisation s'est révélée féconde. Certains tores algébriques étant proches du plan euclidien, on peut imaginer qu'il en soit de même pour leur géométrie. Les relations géométriques ont du sens dans ces tores et peuvent être manipulées plus ou moins intuitivement.

Par ailleurs, l'alternative principale à cette approche est l'étude des géodésiques et celle des actions de groupes de Lie, qui dépassent mon niveau de connaissances.

Enfin, et c'est le plus important, les relations géométriques sont liées au groupe d'isométrie de manière très simple comme on va le voir, et les transferts interagissent avec les structures algébriques de manière intéressante.

2) Lien entre les deux approches

On considère que les relations de congruence et d'interposition donnent une idée de la géométrie intrinsèque d'un espace métrique et que le groupe d'isométrie renseigne sur sa forme générale. Un des buts du TIPE est d'étudier les liens entre ces deux approches de la géométrie d'un espace métrique dans le cas particulier de certains tores.

Théorème I.1

Soient (X, δ_X) , (Y, δ_Y) deux espaces métriques compacts et $\sigma : (X, \delta_X) \hookrightarrow (Y, \delta_Y)$

$\sigma^{-1} : (Y, \delta_Y) \hookrightarrow (X, \delta_X)$ et $\mathcal{G}(X, \delta_X) \approx \mathcal{G}(Y, \delta_Y)$.

De plus, si σ est un homéomorphisme, alors $\mathcal{G}(X, \delta_X) \cong \mathcal{G}(Y, \delta_Y)$

Preuve :

La preuve n'utilise que la propriété de 1-transfert de σ et σ^{-1} .

-Le premier résultat découle de la définition.

-On pose $\mu = \left(\begin{array}{c} \mathcal{G}(X, \delta_X) \longrightarrow \mathcal{G}(Y, \delta_Y) \\ f \mapsto \sigma \circ f \circ \sigma^{-1} \end{array} \right)$

μ est bien une application :

Soit $f \in \mathcal{G}(X, \delta_X)$. Soit $(a, b) \in Y^2$.

$\delta_Y(\mu(f)(a), \mu(f)(b)) = \delta_Y(\sigma(f(\sigma^{-1}(a))), \sigma(f(\sigma^{-1}(b))))$.

f est une isométrie de (X, δ_X) donc $\delta_X(f(\sigma^{-1}(a)), f(\sigma^{-1}(b))) = \delta_X(\sigma^{-1}(a), \sigma^{-1}(b))$.

σ étant un 1-transfert, on a :

$\delta_Y(\mu(f)(a), \mu(f)(b)) = \delta_Y(\sigma(\sigma^{-1}(a)), \sigma(\sigma^{-1}(b))) = \delta_Y(a, b)$.

Donc $\mu(f)$ conserve les distances sur (Y, δ_Y) .

$\mu(f)$ est bijective par composition, donc $\mu(f) \in \mathcal{G}(Y, \delta_Y)$.

- μ est un isomorphisme :

μ est clairement un morphisme.

On montre en utilisant le fait que σ^{-1} est un 1-transfert que $g \mapsto \sigma^{-1} \circ g \circ \sigma$ est un morphisme $\mathcal{G}(X, \delta_X) \rightarrow \mathcal{G}(Y, \delta_Y)$ qui est l'inverse de μ .

- σ est continue.

Soit $f_0 \in \mathcal{G}(X, \delta_X)$, soit $\epsilon > 0$.

D'après le théorème de Heine, σ est uniformément continue donc il existe $r > 0$ tel que $\forall x, y \in X, \delta_X(x, y) \leq r \implies \delta_Y(\sigma(x), \sigma(y)) \leq \epsilon$.

Soit $f \in B(f_0, r)$.

$\exists x \in X, \Delta_X(\mu(f_0), \mu(f)) = \delta_X(\mu(f_0)(x), \mu(f)(x))$

$\delta_X(f_0 \circ \sigma^{-1}(x), f \circ \sigma^{-1}(x)) \leq \Delta_X(f_0, f) \leq r$ donc

$\Delta_X(\mu(f_0), \mu(f)) = \delta_X(\sigma(f_0 \circ \sigma^{-1}(x)), \sigma(f \circ \sigma^{-1}(x))) \leq \epsilon$.

C'est-à-dire que μ est continue.

On montre de même que μ^{-1} est continue, donc μ est un isomorphisme de groupes topologiques.

Un espace métrique est dit fortement convexe s'il vérifie $\forall (a, c) \in X^2, \forall t \in [0; d(a, c)], \exists b \in X, abc$ et $d(a, b) = t$.

C'est-à-dire qu'entre deux points de X il y en existe un situé à toute distance inférieure à la leur.

Proposition I.2

Soient (X, δ_X) , (Y, δ_Y) deux espaces métriques fortement convexes.
 Tout transfert $f : X \rightarrow Y$ est un homéomorphisme.

Preuve :

★ On suppose qu'il existe un transfert $f : X \rightarrow Y$.

Montrons que $\forall (x_1, x_2, x_3, x_4) \in X^4, \delta_X(x_1, x_2) \leq \delta_X(x_3, x_4) \implies \delta_Y(f(x_1), (x_2)) < \delta_Y(f(x_3), (x_4))$:

Considérons la formule $F[x, y, z, t] = \exists u(xy \equiv zu \wedge \overline{zut})$.

Soient $(x, y, z, t) \in X^4$ tel que $\delta_X(x, y) \leq \delta_X(z, t)$. On a $\delta_X(x, y) \in [0; \delta_X(z, t)]$ donc par forte convexité de X , $\exists u \in X, \overline{zut}$ et $\delta_X(z, u) = \delta_X(x, y)$, c'est-à-dire que (x, y, z, t) satisfait $F[x, y, z, t]$.

Réciproquement, soit $(x, y, z, t) \in X^4$ tel que $X \models F[x, y, z, t]$, et soit $u \in X$ tel que $\delta_X(z, u) + \delta_X(u, t) = \delta_X(z, t)$ et $\delta_X(x, y) = \delta_X(z, u)$.

On a $\delta_X(x, y) = \delta_X(z, t) - \delta_X(u, t)$, d'où $\delta_X(x, y) \leq \delta_X(z, t)$.

De même, pour $(x, y, z, t) \in Y^4, \delta_X(x, y) \leq \delta_Y(z, t) \iff Y \models F[x, y, z, t]$.

Ainsi pour $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in X^4$ avec $\delta_X(x_1, x_2) < \delta_X(x_3, x_4)$, on a $X \models F[x_1, x_2, x_3, x_4]$ donc d'après la **prop I.2**, $Y \models F[f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4)]$ donc $\delta_Y(f(x_1), f(x_2)) < \delta_Y(f(x_3), f(x_4))$.

Or $X \models \neg(x_1x_2 \equiv x_3x_4)$ et f étant un transfert, avec la **prop I.2** on obtient $Y \models \neg(f(x_1)f(x_2) \equiv f(x_3)f(x_4))$ et $\delta_Y(f(x_1), f(x_2)) < \delta_Y(f(x_3), f(x_4))$

★ Soit U un ouvert de (Y, δ_Y) .

Soit $x_U \in f^{-1}(U)$. On pose $y_U = f(x_U)$.

$\exists r > 0, B(y_U, r) \subset U$.

Soit $y \in B(y_U, r) - \{y_U\}$ et soit $x \in B(x_U, \delta_X(x_U, f^{-1}(y)))$.

$\delta_X(x_U, x) < \delta_X(x_U, f^{-1}(y))$ donc $\delta_Y(y_U, f(x)) < \delta_Y(y_U, y) < r$ donc $f(x) \in U$ donc $x \in f^{-1}(U)$.

$\{x_U\} \subset B_X(x_U, \delta_X(x_U, f^{-1}(y))) \subset f^{-1}(U) : f^{-1}(U)$ est ouvert et f est continue.

On montre de la même façon que f^{-1} est continue.

Corollaire

Si (X, δ_X) sont deux espaces métriques fortement convexes et compacts, alors tout transfert de l'un dans l'autre induit un isomorphisme entre les groupes d'isométrie donné par la conjugaison par le transfert.

Ceci permettra en IV de préciser la forme de transferts entre les tores d'étude.

II - Tores étudiés

1) Le groupe commutatif $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.

On considère le groupe commutatif $(\mathbb{R}^2, +)$. \mathbb{Z}^2 en est un sous-groupe.

Le groupe quotient $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ est un groupe commutatif.

$\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 = \{(a_1, a_2) + \mathbb{Z}^2 \mid (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2\}$.

On notera $[a_1, a_2]$ l'élément $(a_1, a_2) + \mathbb{Z}^2$, et φ l'application $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 \mapsto [a_1, a_2]$.

Soit $\kappa = \left(\begin{array}{c} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{Z}^2 \\ (x_1, x_2) \mapsto (\lfloor \frac{1}{2} - x_1 \rfloor, \lfloor \frac{1}{2} - x_2 \rfloor) \end{array} \right)$
 Cette application possède la propriété suivante :

Lemme II.1

Soit $A \in \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Soit $X \in A$.

$X + \kappa(X) \in]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]^2 \cap A$

Preuve :

On pose $(x_1, x_2) = X$.

$\lfloor \frac{1}{2} - x_1 \rfloor \leq \frac{1}{2} - x_1 < \lfloor \frac{1}{2} - x_1 \rfloor + 1$

Donc $-x_1 - \frac{1}{2} < \lfloor \frac{1}{2} - x_1 \rfloor \leq \frac{1}{2} - x_1$

Et $-\frac{1}{2} < x_1 + \lfloor \frac{1}{2} - x_1 \rfloor \leq \frac{1}{2}$.

De même, $x_2 + \lfloor \frac{1}{2} - x_1 \rfloor \in]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$

De plus, $\kappa(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2$ donc $X + \kappa(x_1, x_2) \in A$.

$X + \kappa(X) \in]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]^2 \cap A$.

On va définir une loi externe $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ satisfaisant une minorité des propriétés des lois externes d'espaces vectoriels, mais qui permet néanmoins de faire du calcul sur $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, ce qui sera très utile dans la partie V.

$$\text{Soit } \cdot = \left(\begin{array}{c} \mathbb{R} \times \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T} \\ (\lambda, [x_1, x_2]) \rightarrow \lambda((x_1, x_2) + \kappa(x_1, x_2)) + \mathbb{Z}^2 \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} &\text{Propriétés élémentaires de la loi } \cdot : \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall A \in \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2, \\ &-0.A = [0, 0] \\ &-\lambda.[0, 0] = [0, 0] \\ &-1.A = A \\ &-(-1).A = -A. \\ &-\lambda.A + \mu.A = (\lambda + \mu).A \end{aligned}$$

Ceci découle directement de la définition de la loi.

Remarque : on ne dispose pas des règles :

$$\lambda.A + \lambda.B = \lambda.(A + B) \text{ et } \mu.(\lambda.A) = (\mu\lambda).A.$$

Proposition II.1

Soit $X \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]^2$. Soit $\lambda \in [0; 1]$.

- Si $X \in]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]^2$, $\varphi(\lambda\overrightarrow{OX}) = \lambda.\varphi(\overrightarrow{OX})$.
- Si $X \in \{-\frac{1}{2}\} \times]\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$, $\varphi(\lambda\overrightarrow{OX}) = s_3(\lambda.\varphi(\overrightarrow{OX}))$.
- Si $X \in]\frac{1}{2}; \frac{1}{2}] \times \{-\frac{1}{2}\}$, $\varphi(\lambda\overrightarrow{OX}) = s_1(\lambda.\varphi(\overrightarrow{OX}))$.
- Si $X = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, $\varphi(\lambda\overrightarrow{OX}) = r_2(\lambda.\varphi(\overrightarrow{OX}))$.

Preuve :

★ Si $X \in]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]^2$, $\kappa(\overrightarrow{OX}) = (0, 0)$ donc $\lambda(\overrightarrow{OX} + \kappa(\overrightarrow{OX})) = \lambda\overrightarrow{OX}$ et $\lambda.\varphi(\overrightarrow{OX}) = \varphi(\lambda\overrightarrow{OX})$.

★ Si $X \in \{-\frac{1}{2}\} \times]\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$, $\kappa(\overrightarrow{OX}) = (1, 0)$ donc $\lambda(\overrightarrow{OX} + \kappa(\overrightarrow{OX})) = S_3(\lambda\overrightarrow{OX})$ et $\lambda.\varphi(\overrightarrow{OX}) = s_3(\varphi(\lambda\overrightarrow{OX}))$.

★ Si $X \in]\frac{1}{2}; \frac{1}{2}] \times \{-\frac{1}{2}\}$, $\kappa(\overrightarrow{OX}) = (0, 1)$ donc $\lambda(\overrightarrow{OX} + \kappa(\overrightarrow{OX})) = S_1(\lambda\overrightarrow{OX})$ et $\lambda.\varphi(\overrightarrow{OX}) = s_1(\varphi(\lambda\overrightarrow{OX}))$.

★ Si $X = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, $\kappa(\overrightarrow{OX}) = (1, 1)$ donc $\lambda(\overrightarrow{OX} + \kappa(\overrightarrow{OX})) = R_2(\lambda\overrightarrow{OX})$ et $\lambda.\varphi(\overrightarrow{OX}) = r_2(\varphi(\lambda\overrightarrow{OX}))$.

Pour les définitions de $s_1, s_3, r_2, S_1, S_3, R_2$, voir la partie III, paragraphe 2.

2) Tores algébriques

1) Définition

Soit $\| \cdot \|$ une norme sur \mathbb{R}^2 .

L'application $\delta_{\mathbb{T}} =$

$\left(\begin{array}{l} \mathbb{T}^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (A, B) \mapsto \text{Inf}(\{\|a - b\| \mid (a, b) \in A \times B\}) \end{array} \right)$ est une distance sur \mathbb{T} .

On notera \mathbb{T} l'espace métrique associé.

Lorsque $\| \cdot \|$ est la norme de Hölder d'indice p , on précisera \mathbb{T}_p .

La distance $\delta_{\mathbb{T}}(A, B)$ sera souvent notée AB .

Par équivalence des normes sur \mathbb{R}^2 , les distances $\delta_{\mathbb{T}}$ induisent une même topologie sur $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ qui en fait un groupe topologique.

On parlera donc du groupe topologique \mathbb{T} .

φ est un morphisme surjectif de groupes topologiques $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}$. (φ est 1-lipschitzienne)

Quelques propriétés de \mathbb{T} :

\mathbb{T} est compact et fortement convexe.

Preuve :

★ $\mathbb{T} = \varphi([0; 1]^2)$ donc par continuité de φ et par compacité de $[0; 1]$, \mathbb{T} est compact.

★ Soient $A, C \in \mathbb{T}$ avec $A \neq C$. Soit $(X, Z) \in A \times B$ tel que $AC = XZ$.

Par séparation de la norme dans le plan, $X \neq Z$.

Soit $t \in [0; AC] = [0; XZ]$.

On pose $Y = X + \frac{t}{XZ} \overrightarrow{XZ}$.

$XZ = XY + YZ$. On pose $B = \varphi(Y)$.

$AC \leq AB + BC$ or $AB \leq XY$ et $BC \leq YZ$ car $(X, Y, Z) \in A \times B \times C$.

Donc $AB + BC \leq XY + YZ = XZ = AC : AC = AB + BC$.

De plus, si on avait $AB < XY$ on aurait $AC < AC$: absurde, donc $AB = XY = t$, ce qu'il fallait démontrer.

On en déduit que les tores algébriques vérifient les conditions du corollaire de la fin de la partie I, donc que les transferts entre tores algébriques induisent des isomorphismes de groupes topologiques entre leurs groupes d'isométrie.

2) Propriétés de groupe topologique

On considère ici le groupe topologique \mathbb{T} .

Théorème II.1 : théorème de relèvement

Soit $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ continue, soit $X \in f([0, 0])$.

Il existe une unique application $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ continue telle que $g(0, 0) = X$ et $f \circ \varphi = \varphi \circ g$.

Preuve :

On applique le puissant théorème de relèvement ⁽¹⁾ à $f \circ \varphi$. Il suffit de remarquer que (\mathbb{R}^2, φ) est un revêtement universel de \mathbb{T} .

Théorème II.2

Les automorphismes de \mathbb{T} sont les

$$[x, y] \mapsto [ax + by, cx + dy] \text{ avec } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{Z}).$$

Preuve :

Soit f un automorphisme de \mathbb{T} .

-On pose $F = f \circ \varphi$. F est continue.

$F(0,0) = \varphi(0,0)$ donc d'après le théorème de relèvement, $\exists g \in C^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ telle que : $F = \varphi \circ g$. et $g(0,0) = (0,0)$.

-Soient $a, b \in \mathbb{R}^2$.

$F(a+b) = F(a) + F(b)$ donc $\varphi(g(a+b)) = \varphi(g(a) + g(b))$. Donc $\exists k(a,b) \in \mathbb{Z}^2, g(a+b) = g(a) + g(b) + k(a,b)$.

On définit ainsi une application $k : (\mathbb{R}^2)^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$

On note dx_1, dx_2 les projections canoniques $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, continues pour la norme produit sur $(\mathbb{R}^2)^2$.

$k = g \circ (dx_1 + dx_2) - g \circ dx_1 - g \circ dx_2$ est continue. Par connexité de $(\mathbb{R}^2)^2$, k est constante égale à $k((0,0), (0,0)) = -g(0,0) = (0,0)$.

Ainsi g est un endomorphisme continu de $\mathbb{R}^2 : \exists(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4, \forall(x,y) \in \mathbb{R}^2, g(x,y) = (ax + by, cx + dy)$.

$-f([1,0]) = \varphi(a,c) = [a,c] = 0_{\mathbb{T}}$ donc $(a,c) \in \mathbb{Z}^2$.

De même, $(b,d) \in \mathbb{Z}^2$.

On notera $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ l'application f .

$-f^{-1}$ est un automorphisme de \mathbb{T} , il est de la forme $\begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix}$ avec $(i,j,k,l) \in \mathbb{Z}^4$.

On pose $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix}$.

Soit $[x,y] \in \mathbb{T}$.

$f \circ f^{-1}([x,y]) = [a_1x + a_2y, a_3x + a_4y] = [x,y]$.

On pose $A = \text{Max}(|a_1|, |a_2|, |a_3|, |a_4|) + 2$. $A > 0$.

Ainsi $[\frac{a_1}{A}, \frac{a_3}{A}] = [\frac{1}{A}, 0]$.

On en déduit d'une part que $\frac{a_3}{A} \in \mathbb{Z}$.

Or $|\frac{a_3}{A}| < \frac{A}{A}$ donc $|\frac{a_3}{A}| < 1$ donc $|\frac{a_3}{A}| = 0$. Donc $a_3 = 0$.

D'autre part, $\frac{a_1}{A} \in \frac{1}{A} + \mathbb{Z}$. Donc $\exists k \in \mathbb{Z}, a_1 = 1 + Ak$.

Si $k < 0$, $|a_1| = A|k| - 1 < A - 1$. donc $A|k| < A$ donc $0 < |k| < 1$: impossible.

Donc $k \geq 0$, $|a_1| = 1 + A|k| < A$ donc $A|k| < A - 1$ donc $|k| < \frac{A-1}{A}$ donc $0 \leq |k| < 1$ donc $k = 0$.

Ainsi $a_1 = 1$. De même, $a_2 = 0$ et $a_4 = 1$.

C'est-à-dire que $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix} = I_2 : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ admet un inverse à coefficients entiers.

On en déduit que $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{Z})$.

Le paragraphe qui suit n'est utilisé que dans la partie V du TIPE.
Il est peut-être plus sage de le lire en introduction de cette partie.

3) Calcul dans \mathbb{T}_2 .

On se place dans \mathbb{T}_2 appelé "tore euclidien"; les distances XY pour $X, Y \in \mathbb{R}^2$ sont donc ici les normes $\|X - Y\|_2$.

L'objectif est de démontrer des résultats permettant de traduire des énoncés de \mathcal{L} en énoncés faisant intervenir $\delta_{\mathbb{T}_2}$, la loi \cdot et $\varphi_{\mathbb{T}}$ et inversement.

De cette manière, on pourra en partie V démontrer par le calcul.

Lemme II.2

Soient $A, B \in \mathbb{T}$. Soit $(X, Y) \in A \times B$.

$$AB = XY \iff \overrightarrow{XY} \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]^2.$$

De plus, pour $\overrightarrow{XY} = (x_1, x_2) \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]^2$, on a :

- Si $B - A = [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, l'ensemble des points $Z \in B$ satisfaisant $AB = XZ$ est $\{X + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}); X + (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}); X + (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}); X + (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})\}$.
- Si $B - A \in \{[\frac{1}{2}, y] \mid y \in]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}[\}$, l'ensemble des points $Z \in B$ satisfaisant $AB = XZ$ est $\{X + (\frac{1}{2}, x_2); X + (-\frac{1}{2}, x_2)\}$; et $x_2 \in]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}[$.
- Si $B - A \in \{[x, \frac{1}{2}] \mid x \in]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}[\}$, l'ensemble des points $Z \in B$ satisfaisant $AB = XZ$ est $\{X + (x_1, \frac{1}{2}); X + (x_1, -\frac{1}{2})\}$; et $x_1 \in]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}[$.
- Sinon, $B - A \in \{[x, y] \mid (x, y) \in]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]^2\}$ et l'ensemble des points $Z \in B$ satisfaisant $AB = XZ$ est $\{X + (x_1, x_2)\}$; et $(x_1, x_2) \in]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}[$.

Preuve :

★ Sens indirect et caractérisation des cas :

On suppose $\overrightarrow{XY} \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]^2$.

Soit $Z \in B$ tel que $AB = XZ$.

$\exists (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $Z = Y + (k_1, k_2)$.

$XY^2 \geq XZ^2$, soit :

$$x_1^2 + x_2^2 \geq (x_1 + k_1)^2 + (x_2 + k_2)^2.$$

$$\text{Donc } k_1^2 + k_2^2 + 2(k_1x_1 + k_2x_2) \leq 0.$$

$$\text{Avec } -2(k_1x_1 + k_2x_2) \leq |-2(k_1x_1 + k_2x_2)| \leq 2|x_1||k_1| + 2|x_2||k_2| \leq |k_1| + |k_2|$$

d'où $k_1^2 + k_2^2 \leq |k_1| + |k_2|$.

Par l'absurde, $k_1^2 = |k_1|$ et $k_2^2 = |k_2|$.

Donc $k_1, k_2 \in \{-1; 0; 1\}$.

Soit $i \in \{1; 2\}$.

-Si $x_i \in]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}[$, si $k_i \neq 0$, on a $k_1^2 + k_2^2 < |k_i| + |k_{3-i}|$: impossible.

Donc dans ce cas $k_i = 0$.

-Si $x_i = \frac{1}{2}$, alors on a $(x_i - 1)^2 = x_i^2$ et $(x_i + 1)^2 - x_i^2 = 2x_i + 1 > 0$ donc $k_1 \in \{-1; 0\}$.

-Si $x_i = -\frac{1}{2}$, alors on a $(x_i + 1)^2 = x_i^2$ et $(x_i - 1)^2 - x_i^2 = -2x_i - 1 > 0$ donc $k_1 \in \{0; 1\}$.

En remarquant que $(x_1, x_2) \in B - A$, on en déduit les différents cas.

Dans tous les cas, $XY = XZ = AB$.

★ Réciproquement, on suppose $XY = AB$.

S'il existait un x_i tel que $|x_i| > \frac{1}{2}$ on aurait pour $Min((x_i - 1)^2 + x_{3-i}^2 - (x_i^2 + x_{3-i}^2), (x_i + 1)^2 + x_{3-i}^2 - (x_i^2 + x_{3-i}^2)) = Min(1 - 2x_i, 1 + 2x_i) = 1 - 2|x_i| < 0$ donc Y ne minimiserait pas XY dans B : contradictoire.

Donc $\overrightarrow{XY} \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]^2$.

On en déduit :

Corollaire

Soient $A, B \in \mathbb{T}$. Soit $(X, Y) \in A \times B$.

$AB = \|X - Y + \kappa(X - Y)\|_2$.

Preuve :

Conséquence des lemmes II.1 et II.2.

Proposition II.2

Soit $X \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]^2$. Soit $\lambda \in [0; 1]$

$O_{\mathbb{T}}\varphi(\lambda\overrightarrow{OX}) = O_{\mathbb{T}}\lambda.\varphi(\overrightarrow{OX}) = \lambda O_{\mathbb{T}}\varphi(\overrightarrow{OX})$.

Preuve :

D'après le **lemme II.2**, il existe $f \in GL(\mathbb{T}_2)$ telle que $\varphi(\lambda\overrightarrow{OX}) = f(\lambda.\varphi(\overrightarrow{OX}))$.

$O_{\mathbb{T}}\varphi(\lambda\overrightarrow{OX}) = O_{\mathbb{T}}f(\lambda.\varphi(\overrightarrow{OX})) = f(O_{\mathbb{T}})f(\lambda.\varphi(\overrightarrow{OX}))$.

f étant une isométrie, $O_{\mathbb{T}}\varphi(\lambda\overrightarrow{OX}) = O_{\mathbb{T}}\lambda.\varphi(\overrightarrow{OX})$.

On écrit $X = (x_1, x_2)$.

$O_{\mathbb{T}}\lambda.\varphi(\overrightarrow{OX}) = \|\lambda((x_1, x_2) + \kappa(x_1, x_2)) + \kappa(\lambda((x_1, x_2) + \kappa(x_1, x_2)))\|_2$.

On écrit $\kappa(x_1, x_2) = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$.

$\kappa(\lambda((x_1, x_2) + \kappa(x_1, x_2))) = \lambda((x_1, x_2) + \kappa(x_1, x_2)) + (\lfloor \frac{1}{2} - \lambda(x_1 + k_1) \rfloor, \lfloor \frac{1}{2} - \lambda(x_2 + k_2) \rfloor)$.

Avec pour $i \in \{1, 2\}$, $x_i + k_i \in]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$ donc $\lambda(x_i + k_i) \in]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$ donc $0 \leq \frac{1}{2} - \lambda(x_i + k_i) < 1$.

Ainsi $(\lfloor \frac{1}{2} - \lambda(x_1 + k_1) \rfloor, \lfloor \frac{1}{2} - \lambda(x_2 + k_2) \rfloor) = (0, 0)$ et $O_{\mathbb{T}}\lambda.\varphi(\overrightarrow{OX}) = \|\lambda((x_1, x_2) - \kappa(x_1, x_2))\|_2 = \lambda\|(x_1, x_2) - \kappa(x_1, x_2)\|_2 = \lambda O_{\mathbb{T}}\varphi(\overrightarrow{OX})$.

Proposition II.3

Soient $A, C \in \mathbb{T}_2$, avec $A \neq C$. Soit $B \in \mathbb{T}$.

- Si $C - A = [\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$ alors $AB + BC = AC \iff B = A + f(\frac{AB}{AC}.(C - A))$ avec $f \in \{id; s_1; s_3; r_2\}$
- Si $C - A \in \{[\frac{1}{2}; y] \mid y \in [0; 1] - \{\frac{1}{2}\}\}$ alors $AB + BC = AC \iff B = A + f(\frac{AB}{AC}.(C - A))$ avec $f \in \{id; s_3\}$
- Si $C - A \in \{[x; \frac{1}{2}] \mid x \in [0; 1] - \{\frac{1}{2}\}\}$ alors $AB + BC = AC \iff B = A + f(\frac{AB}{AC}.(C - A))$ avec $f \in \{id; s_1\}$
- Sinon, $AB + BC = AC \iff B = A + \frac{AB}{AC}.(C - A)$

Preuve :

Soit $X \in A$. Il existe un point $Y \in B$ tel que $AB = XY$.

Soit $Z \in C$ tel que $BC = YZ$.

On pose $(x_1, x_2) = \overrightarrow{XZ}$

$XZ \leq XY + YZ = AB + BC = AC \leq XZ$ donc $XZ = XY + YZ$.

C'est un cas d'égalité dans l'inégalité de Minkowski. $A \neq C$ donc $X \neq Z$.

$Y = X + \frac{XY}{XZ}\overrightarrow{XZ} = \frac{AB}{AC}\overrightarrow{XZ}$.

Donc $B = \varphi(Y) = \varphi(X) + \varphi(\frac{AB}{AC}\overrightarrow{XZ})$.

$B = A + \varphi(\frac{AB}{AC}\overrightarrow{XZ})$ avec $\frac{AB}{AC} \in [0; 1]$.

On applique le **lemme II.2** :

★ Si $C - A = [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, l'ensemble des points $Z \in C$ satisfaisant $AC = XZ$ est $\{X + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}); X + (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}); X + (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}); X + (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})\}$.

On conclut en utilisant **prop II.1** pour le sens direct et **prop II.2** pour la réciproque.

★ Si $C - A \in \{[\frac{1}{2}, y] \mid y \in]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}[\}$, alors $x_2 \in]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}[$ et l'ensemble des points $Z \in C$ satisfaisant $AC = XZ$ est $\{X + (\frac{1}{2}, x_2); X + (-\frac{1}{2}, x_2)\}$.

De même, on conclut en utilisant ce qui précède.

★ Si $C - A \in \{[x, \frac{1}{2}] \mid x \in]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}[\}$, l'ensemble des points $Z \in C$ satisfaisant $AC = XZ$ est $\{X + (x_1, \frac{1}{2}); X + (x_1, -\frac{1}{2})\}$ avec $x_1 \in]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}[$.

★ Sinon, $A - C \in \{[x, y] \mid (x, y) \in]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}[^2 \}$ et l'ensemble des points $Z \in C$ satisfaisant $AC = XZ$ est $\{X + (x_1, x_2)\}$ avec $(x_1, x_2) \in]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}[$.

Les deux propositions II.2 et II.3 ainsi que le lemme II.2 seront abondamment utilisées dans la partie V, il est conseillé de les mémoriser ou de les garder à portée de main.

Calcul des groupes d'isométrie

On procède ici à une détermination plus ou moins explicite de $\mathcal{G}(\mathbb{T})$ en passant par l'étude des isométries de $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$.

1) Passage par le plan normé.

Dans tout ce paragraphe, on fixe une norme $\|\cdot\|$ sur \mathbb{R}^2 . Le **plan normé** est la structure d'espace affine normé $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$

Les éléments de \mathbb{R}^2 seront appelés points et notés en majuscules ou vecteurs et représentés en minuscules ou avec des flèches. Le point particulier $(0, 0)$ est noté O . Quand on s'est placé dans $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$, la notation MN désigne la distance entre \overrightarrow{OM} et \overrightarrow{ON} .

L'étude des isométries de \mathbb{T} va passer par l'étude de celles de $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$.

a) Caractère affine des isométries de $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$.

On commence par le résultat fondamental suivant, dont la preuve est fortement inspirée d'une preuve du théorème de Mazur-Ulam.

Théorème III.1

Soient $X \in \mathbb{R}^2$, $r > 0$ et $g : B(\overrightarrow{OX}, r) \rightarrow \mathbb{R}^2$ une application qui conserve les distances.

g la restriction à $B(\overrightarrow{OX}, \frac{r}{2})$ est la restriction d'une isométrie affine du plan normé.

Preuve :

1) Conservation des milieux.

Soient $M, N \in B(\overrightarrow{OX}, \frac{r}{2})$.

★ Préliminaires :

La restriction h de g à $B(\overrightarrow{OM}, MN) \cup B(\overrightarrow{ON}, MN)$ au départ et à $B(\overrightarrow{Og(M)}, MN) \cup B(\overrightarrow{Og(N)}, MN)$ à l'arrivée est une isométrie bijective :

- Elle conserve les distances car g conserve les distances sur $B(\overrightarrow{OX}, r)$ et $B(\overrightarrow{OM}, MN) \cup B(\overrightarrow{ON}, MN) \subset B(\overrightarrow{OX}, r)$.
- Elle est injective par injectivité de g .
- $g(B(\overrightarrow{OM}, MN) \cup B(\overrightarrow{ON}, MN)) \subset B(\overrightarrow{Og(M)}, MN) \cup B(\overrightarrow{Og(N)}, MN)$ car $B(\overrightarrow{OM}, MN) \cup B(\overrightarrow{ON}, MN) \subset B(\overrightarrow{OX}, r)$.
- Soient τ_1, τ_2 les translations respectives de vecteurs $\overrightarrow{g(M)M}$ et $\overrightarrow{g(N)N}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, $\tau_1 \circ g|_{B(\overrightarrow{OM}, MN - \frac{1}{n+1})}$ est une application du compact $B(\overrightarrow{OM}, MN - \frac{1}{n+1})$ dans lui-même qui conserve les distances, elle est donc surjective.

Or $B(\overrightarrow{OM}, NM) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B(\overrightarrow{OM}, MN - \frac{1}{n+1})$ donc $\tau_1 \circ g(B(\overrightarrow{OM}, MN)) = B(\overrightarrow{OM}, MN)$.

Donc $g(B(\overrightarrow{OM}, MN)) = B(\overrightarrow{Og(M)}, NM)$. De même, $g(B(\overrightarrow{ON}, MN)) = B(\overrightarrow{Og(N)}, MN)$, et h est surjective.

h est une isométrie bijective $B(\overrightarrow{OM}, MN) \cup B(\overrightarrow{ON}, MN) \rightarrow B(\overrightarrow{Og(M)}, MN) \cup B(\overrightarrow{Og(N)}, MN)$.

★ Première étape de la démonstration :

On note I le milieu (affine) de $[MN]$. $I \in B(\overrightarrow{OM}, MN) \cup B(\overrightarrow{ON}, MN)$.

Soit E l'ensemble des isométries de $B(\overrightarrow{OM}, MN) \cup B(\overrightarrow{ON}, MN)$ (dans lui-même) qui admettent M et N comme points fixes. E n'est pas vide.

Soit $f \in E$. $f(I)I \leq f(I)M + MI = f(I)f(M) + MI = MI + MI = 2MI$.

Soit s_I la symétrie centrale de centre I . s_I est involutive et c'est une isométrie.

$$(\forall A, B \in \mathbb{R}^2, s_I(A)s_I(B) = s_I(A)\overrightarrow{I} + Is_I(B) = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BA})$$

s_I induit une bijection de $B(\overrightarrow{OM}, MN) \cup B(\overrightarrow{ON}, MN)$ sur lui-même.

De plus, $s_I(M) = N$ et $s_I(N) = M$.

Pour $f \in E$, on définit $\rho(f) = s_I \circ f^{-1} \circ s_I \circ f$.

$\rho(f)$ est une isométrie de $B(\overrightarrow{OM}, MN) \cup B(\overrightarrow{ON}, MN)$ telle que $\rho(f)(M) = M$ et $\rho(f)(N) = N$.

Donc $\rho(f)(I)I \leq 2MI$.

Or, par définition de s_I , I est le milieu de $[s_I(f(I))f(I)]$

Donc $s_I(f(I))f(I) = 2f(I)I$. f^{-1} conserve les distances, en "composant $s_I(f(I))f(I)$ " par f^{-1} :

$$2f(I)I = f^{-1} \circ s_I \circ f(I)I$$

On compose encore par s_I en utilisant $s_I(I) = I$:

$$2f(I)I = \rho(f)(I)I.$$

On en déduit que pour tout entier naturel n , $\rho^n(f)(I)I = 2^n f(I)I \leq 2MI$:

$$\forall f \in E, \forall n \in \mathbb{N}, f(I)I \leq \frac{2MI}{2^n}.$$

$\forall f \in E, f(I) = I.$

★ Seconde étape :

Soit $s_{I'}$ la symétrie centrale dont le centre est le milieu I' de $[h(M), h(N)]$.

On dispose pour $s_{I'}$ de propriétés analogues à celles de s_I .

On pose $\mu(h) = s_I \circ h^{-1} \circ s_{I'} \circ h$.

Par composition, c'est une isométrie de $B(M, MN) \cup B(N, MN)$.

$\mu(h)(M) = s_I \circ h^{-1}(h(N)) = M$ et $\mu(h)(N) = N$.

Donc $\mu(h) \in E$, donc $\mu(h)(I) = I$.

On compose par $h \circ s_I$:

$s_{I'}(h(I)) = h(I)$.

$h(I)$ est un point fixe de $s_{I'}$, $h(I) = I'$.

Il ne reste plus qu'à remarquer que I' est le milieu de $[g(M)g(N)]$ et que $h(I) = g(I)$.

2) Conservation des barycentres

La conservation des barycentres se déduit de la conservation des milieux par densité de l'ensemble des rationnels diadiques entre 0 et 1 dans $[0; 1]$, par convexité de $B(\overrightarrow{OX}, \frac{r}{2})$ et par continuité de g .

3) Caractère affine

Ici je pose $D = B(\overrightarrow{OX}, \frac{r}{2})$ et j'utiliserai comme seules propriétés de D les suivantes : D est un convexe d'intérieur non vide de $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ sur lequel g conserve les barycentres.

Soit $E = \{\frac{u}{2} \mid u \in D\}$. $E \subset D$ car $\forall u \in D, \frac{1}{2}u = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}(0,0) \in D$ (par convexité).

E est un voisinage ouvert de $(0,0)$ car D en est un et par définition de E .

Soit $(a, b) = (\frac{1}{2}u, \frac{1}{2}v) \in E^2$. $a + b = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v \in D$ par convexité de ce dernier.

On pose $i = U \mapsto \overrightarrow{g(O)g(U)}$. Soit $(u, v) \in D^2$ tel que $u + v \in D$. Il existe trois points U, V et W de E tels que $u = \overrightarrow{OU}$, $v = \overrightarrow{OV}$ et $u + v = \overrightarrow{OW}$ (car D est une partie du plan affine).

$\overrightarrow{OU} + \overrightarrow{OV} - \overrightarrow{OW} = \vec{0}$. Donc O est le barycentre de $((U, 1); (V, 1); (W, -1))$.

$\overrightarrow{g(O)}$, le barycentre de $((g(U), 1); (g(V), 1); (g(W), -1))$, vérifie :

$\overrightarrow{g(O)g(U)} + \overrightarrow{g(O)g(V)} = \overrightarrow{g(O)g(W)}$: $i(u) + i(v) = i(u + v)$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda u \in D$. $\exists U' \in D, \lambda u = \overrightarrow{OU'}$.

De même, $\overrightarrow{g(O)}$ est le barycentre de $((g(U), \lambda), (g(U'), -1))$, d'où l'égalité $i(\lambda u) = \lambda i(u)$.

D contenant un voisinage ouvert de $(0,0)$, il existe un réel α tel que $e_1 = (\alpha, 0)$ et $e_2 = (0, \alpha)$ soient tous deux dans D .

On considère un endomorphisme linéaire f de \mathbb{R}^2 qui vérifie $f(e_1) = i(e_1)$ et $f(e_2) = i(e_2)$.

Soit $u \in D$. $u = u_1e_1 + u_2e_2$. Comme E contient un voisinage ouvert de $(0, 0)$, il existe un entier naturel n tel que $\frac{u_1}{n}e_1, \frac{u_2}{n}e_2 \in E \subset D$.

Par convexité de D et comme D contient $(0, 0)$, pour tout entier k entre 1 et n , $\frac{k}{n}u \in D$.

On peut calculer $i(u)$ par induction :

$$i(u) = i\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{n}u\right) = i\left(\frac{1}{n}u\right) + i\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n}u\right) = \dots = ni\left(\frac{1}{n}u\right).$$

$$i\left(\frac{1}{n}u\right) = i\left(\frac{u_1}{n}e_1 + \frac{u_2}{n}e_2\right) = i\left(\frac{u_1}{n}e_1\right) + i\left(\frac{u_2}{n}e_2\right) = \frac{u_1}{n}i(e_1) + \frac{u_2}{n}i(e_2).$$

(on utilise deux fois l'inclusion de E dans D et une fois sa définition)

Enfin, $i(u) = u_1i(e_1) + u_2i(e_2) = f(u)$.

C'est-à-dire que i coïncide avec f linéaire sur D .

Montrons que f est une isométrie linéaire en montrant qu'elle conserve la norme :

Soit $u \in \mathbb{R}^2$. $\exists n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{n}u \in D$.

$$\|f(u)\| = \|f(n\left(\frac{1}{n}u\right))\| = n\|f\left(\frac{1}{n}u\right)\| = n\|\frac{1}{n}u\| = \|u\|.$$

Donc g coïncide sur D avec isométrie affine de $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$.

Proposition III.1

Soient A une partie de \mathbb{R}^2 d'intérieur non vide (selon la topologie d'espace vectoriel topologique), τ_1 et τ_2 deux isométries affines de $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ qui coïncident sur A .

Alors $\tau_1 = \tau_2$.

Preuve :

On se ramène à un voisinage B de $(0, 0)$, c'est-à-dire qu'on étudie $\tau'_1 = \tau_1 \circ \tau_w$ et $\tau'_2 = \tau_2 \circ \tau_w$ avec $w \in \overset{\circ}{A}$.

Il suffit de montrer que τ'_1 et τ'_2 sont égales en utilisant l'hypothèse qui devient leur coïncidence sur B .

Puisque B est un voisinage de $(0, 0)$, il existe un réel non nul α tel que $e_1 = (\alpha, 0)$ et $e_2 = (0, \alpha)$ soient tous deux dans B . (e_1, e_2) est une base de \mathbb{R}^2 .

On note l_1, l_2 les parties linéaires de τ'_1, τ'_2 .

$$\tau'_1 = l_1 + \tau'_1((0, 0)) \text{ et } \tau'_2 = l_2 + \tau'_2((0, 0)).$$

$$(0, 0) \in B \text{ donc } \tau'_1((0, 0)) = \tau'_2((0, 0)).$$

Ainsi l_1 et l_2 coïncident sur B . $l_1(e_1) = l_2(e_1)$ et $l_1(e_2) = l_2(e_2)$: $l_1 = l_2$, puis $\tau'_1 = \tau'_2$.

On en déduit $\tau_1 = \tau_2$.

Corollaire : théorème de Mazur-Ulam

Toute isométrie de $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ est affine.

Preuve :

Soit f une isométrie de $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$.

f est une isométrie sur $B(\vec{0}, 1)$ donc d'après le **théorème III.1**, il existe une isométrie affine τ de $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ telle que $f|_{B(\vec{0}, \frac{1}{2})} = \tau|_{B(\vec{0}, \frac{1}{2})}$.

Soit $A \in \mathbb{R}^2$. f étant une isométrie sur $B(\vec{0}, 2OA+2)$, il existe une isométrie τ' de $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ telle que $f|_{B(\vec{0}, OA+1)} = \tau'|_{B(\vec{0}, OA+1)}$.

$A \in B(\vec{0}, OA+1)$ donc $f(A) = \tau'(A)$.

τ et τ' coïncident sur une partie d'intérieur non vide de $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ donc elles sont égales.

Donc $f(A) = \tau(A)$.

C'est-à-dire que $f = \tau$ est affine.

2) Groupes d'isométrie du plan.

A partir d'ici, on confond matrices de $M_2(\mathbb{R})$ et applications linéaires associées dans la base $\{(1, 0); (0, 1)\}$ au départ et à l'arrivée.

Précisons la forme des isométries de $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$.

Soit f une telle isométrie. On note \vec{f} sa partie linéaire.

Il existe une unique translation τ du plan telle que $f = \tau \circ \vec{f}$
 $\vec{f} \in GL(\mathbb{R}^2)$ car $\vec{f} = \tau^{-1} \circ f$ est une isométrie.

Donc il existe des réels a, b, c, d tels que $\vec{f} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

On note $\mathcal{GL}(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ le groupe des isométries linéaires de $\mathbb{R}^2, \|\cdot\|$, et $Trans(\mathbb{R}^2)$ le groupe commutatif des translations du plan.

$\mathcal{G}(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|) = Trans(\mathbb{R}^2) \times \mathcal{GL}(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$.

Proposition III.2

Soit $\mathcal{GL}_{\mathbb{Z}^2}(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|) = \{\vec{f} \in \mathcal{GL}(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|) \mid \vec{f}(\mathbb{Z}^2) = \mathbb{Z}^2\}$.
 $\mathcal{GL}_{\mathbb{Z}^2}(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{GL}(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|) \mid (a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4 \text{ et } |ad - bc| = 1 \right\}$.

Preuve :

L'ensemble $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid (a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4 \text{ et } |ad - bc| = 1 \right\}$ est noté $GL_2(\mathbb{Z})$ et appelé groupe unimodulaire.

Pour la preuve, il suffit de montrer l'équivalence de $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}(\mathbb{Z}^2) = \mathbb{Z}^2$ et $((a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4 \text{ et } |ad - bc| = 1)$ pour $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ inversible.

C'est un résultat connu que le second énoncé est équivalent à ce que $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ soit inversible, à coefficients entiers ainsi que son inverse.

Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. On pose $\vec{f} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

-On suppose $\vec{f}(\mathbb{Z}^2) = \mathbb{Z}^2$.

Alors $\vec{f}(1, 0), \vec{f}(0, 1) = (a, c), (b, d) \in \mathbb{Z}^2$ donc $(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4$.

On a aussi $\vec{f}^{-1}(\mathbb{Z}^2) = \mathbb{Z}^2$ d'où le résultat.

-Réciproquement, on suppose que \vec{f} et \vec{f}^{-1} sont à coefficients entiers.

Soit $(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$. $\vec{f}(k_1, k_2) = (ak_1 + bk_2, ck_1 + dk_2) \in \mathbb{Z}^2$.

Donc $\vec{f}(\mathbb{Z}^2) \subset \mathbb{Z}^2$.

De même, $\vec{f}^{-1}(\mathbb{Z}^2) \subset \mathbb{Z}^2$, donc $\mathbb{Z}^2 \subset \vec{f}(\mathbb{Z}^2)$.

Finalement, $\vec{f}(\mathbb{Z}^2) = \mathbb{Z}^2$.

Proposition III.3

Soit p un indice de Hölder.

$\mathcal{GL}_{\mathbb{Z}^2}(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_p) =$

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

On notera $\mathcal{GL}_{\mathbb{Z}^2}(p) = \{Id; R_1; R_2; R_3; S_1; S_2; S_3; S_4\}$.

Preuve :

Il suffit de noter qu'en notant $S_p = \left\{ \frac{(\cos(\theta), \sin(\theta))}{\|(\cos(\theta), \sin(\theta))\|_p} \mid \theta \in \mathbb{R} \right\}$ la sphère unité de $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_p)$, $S_p \cap \mathbb{Z}^2 = \{(1, 0); (0, 1); (-1, 0); (0, -1)\}$ si $p \neq +\infty$, et $S_{+\infty} \cap \mathbb{Z}^2 = \{(1, 0); (1, 1); (0, 1); (-1, 1); (-1, 0); (-1, -1); (0, -1); (1, -1)\}$

Sachant que $\vec{f}(S_p \cap \mathbb{Z}^2) = \vec{f}(S_p) \cap \vec{f}(\mathbb{Z}^2) = S_p \cap \mathbb{Z}^2$ pour $\vec{f} \in \mathcal{GL}_{\mathbb{Z}^2}(p)$, une disjonction des cas conduit au résultat.

2) Groupe d'isométrie de \mathbb{T} .

a) Forme des isométries de \mathbb{T}

Théorème III.2

Si f est une isométrie de \mathbb{T} , alors il existe une isométrie g de \mathcal{P} , telle que $f \circ \varphi = \varphi \circ g$.

Preuve :

1) Conservation des distances

★ Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\forall A, B \in \mathbb{R}^2, AB \leq \varepsilon \implies AB = \varphi(A)\varphi(B)$.

En effet, soient α, β des réels strictement positifs satisfaisant $\alpha \| \cdot \|_{\infty} \leq \| \cdot \| \leq \beta \| \cdot \|_{\infty}$.

On pose $\varepsilon = \text{Min}(\frac{1}{\alpha}; \frac{3}{5\beta})$.

Soient $A, B \in \mathbb{R}^2$ tels que $AB \leq \varepsilon$.

Alors $\| \overrightarrow{AB} \|_{\infty} \leq \frac{1}{5}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{AB} \in [-\frac{1}{5}; \frac{1}{5}]^2$.

Soit $k \in \mathbb{Z}^2 - \{(0, 0)\}$, $\| \overrightarrow{AB} + k \|_{\infty} \geq \frac{4}{5} > \frac{3}{5}$.

Donc $\| \overrightarrow{AB} + k \| > \frac{3}{\beta 5}$.

$\| \overrightarrow{AB} + k \| > AB$.

Donc $AB = \text{Min}(\{ \| \overrightarrow{A'B'} \| \mid (A', B') \in \varphi(A) \times \varphi(B) \}) = \varphi(A)\varphi(B)$.

On fixe un tel réel strictement positif ε .

★ Soit f dans le groupe d'isométries de \mathbb{T}

Soit g un relèvement de f . (**théorème II.1**)

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

$\overline{B(O, 2\lambda)}$ est un fermé borné de $(\mathbb{R}^2, \| \cdot \|)$ qui est un espace vectoriel normé de dimension finie; c'est un compact.

g est continu car c 'est un relèvement de f donc elle est continue sur $\overline{B(O, 2\lambda)}$, donc uniformément continue sur $B(O, 2\lambda)$ (théorème de Heine), donc sur $B(O, 2\lambda)$. Il existe un rayon r tel que sur $\forall M, N \in B(O, 2\lambda), MN \leq r \implies g(M)g(N) \leq \varepsilon$.

On pose $r_0 = \text{Min}(r, \varepsilon)$. Pour $A, B \in B(\vec{O}, 2\lambda)$ tels que $AB \leq r_0$, on a $AB = g(A)g(B)$.

Soit M fixé dans $B(\vec{O}, \lambda)$.

$\forall A, B \in B(\overrightarrow{OM}, \frac{r_0}{2}) \cap B(\vec{O}, 2\lambda)$, on a $AB \leq r_0$ donc :

$AB = g(A)g(B)$.

C'est-à-dire que g est une isométrie de $B(\overrightarrow{OM}, \frac{r_0}{2}) \cap B(\vec{O}, 2\lambda)$.

On va montrer que la restriction de g à $B(\vec{O}, \lambda)$ est une isométrie affine.

2) Restrictions

-Si $r_0 \geq 2\lambda$, cela découle alors directement de ce qui précède et du **théorème**

III.1.

-Sinon, $\frac{r_0}{2} < \lambda$.

$B(\vec{O}, \lambda)$ est précompact, il en existe un recouvrement fini de la forme $\bigcup_{k=1}^n (B(\overrightarrow{OM}_k, \frac{r_0}{4}) \cap$

$B(\vec{O}, \lambda))$, où les \overrightarrow{OM}_k sont dans $B(\vec{O}, \lambda)$.

$B(\vec{O}, \lambda) \subset \bigcup_{k=1}^n B(\overrightarrow{OM}_k, \frac{r_0}{2}) \subset B(\vec{O}, 2\lambda)$. (l'inclusion de droite se déduit de

l'inégalité triangulaire)

Pour $1 \leq k \leq n$, on note $O_k = B(\overrightarrow{OM}_k, \frac{r_0}{4})$.

$B(\vec{O}, \lambda) \subset \bigcup_{k=1}^n O_k$.

Soit k entre 1 et n , g est une isométrie sur $B(\overrightarrow{OM}_k, \frac{r_0}{2})$ donc d'après le **théorème III.1**, il existe une isométrie affine τ_k qui coïncide avec g sur O_k .

Soient i et j deux entiers compris entre 1 et n .

$B(\vec{O}, \lambda)$ étant connexe par arcs, il existe un chemin γ entre M_i et M_j . On considère la séquence d'ouverts O_k parcourus par γ .

Deux ouverts O_{k_1} et O_{k_2} parcourus successivement sont d'intersection non-vide, cette dernière est un ouvert. Or sur $O_{k_1} \cap O_{k_2}$, τ_{k_1} et τ_{k_2} coïncident : elles sont la restriction d'une même isométrie affine de \mathcal{P} . (prop I.3)

Par induction, il en est de même pour τ_i et τ_j , ainsi $g|_{B(\vec{O}, \lambda)}$ est la restriction d'une isométrie affine τ de $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ à $B(\vec{O}, \lambda)$.

On a montré que $\forall \lambda > 0$, il existe une isométrie affine τ_λ de $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ qui coïncide avec g sur $B(\vec{O}, \lambda)$.

2) Prolongement

Soit $\lambda > 1$.

$g|_{B(\vec{O}, 1)} = \tau_1|_{B(\vec{O}, 1)}$ et $g|_{B(\vec{O}, \lambda)} = \tau_\lambda|_{B(\vec{O}, \lambda)}$.

Or $g|_{B(\vec{O}, 1)} = (g|_{B(\vec{O}, \lambda)})|_{B(\vec{O}, 1)} = (\tau_\lambda|_{B(\vec{O}, \lambda)})|_{B(\vec{O}, 1)} = \tau_\lambda|_{B(\vec{O}, 1)}$

D'après la prop I.3, $\tau_\lambda = \tau_1$. Donc $g|_{B(\vec{0}, \lambda)} = \tau_1|_{B(\vec{0}, \lambda)}$.

Soit $A \in \mathbb{R}^2$, on pose $\lambda = OA + 1$. $A \in B(\vec{0}, \lambda)$ donc $g(A) = \tau_1(A)$. Ainsi $g = \tau_1$.

g est bien une isométrie affine de $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$.

b) Groupe d'isométrie de \mathbb{T}

La caractérisation qui précède n'est pas complète : toute application f vérifiant $f \circ \varphi = \varphi \circ g$ avec g une isométrie de \mathcal{P} est-elle une isométrie ?

Pour $[a, b] \in \mathbb{T}$, on note $\tau_{[a, b]}$ l'isométrie de \mathbb{T} définie par $\forall X \in \mathbb{T}, \tau_{[a, b]}(X) = [a, b] + X$.

On pose $Trans(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2) = \{f \in \mathbb{T}^{\mathbb{T}} \mid \exists \tau \in Trans(\mathbb{R}^2), f \circ \varphi = \varphi \circ \tau\} = \{\tau_{[a, b]} \mid [a, b] \in \mathbb{T}\}$.

Ainsi que $GL(\mathbb{T}) = \{f \in \mathbb{T}^{\mathbb{T}} \mid \exists \vec{g} \in GL_{\mathbb{Z}^2}(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|), f \circ \varphi = \varphi \circ \vec{g}\}$

Théorème III.2

$Trans(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2)$ et $GL(\mathbb{T})$ sont des sous-groupes de $\mathcal{G}(\mathbb{T})$ et $\mathcal{G}(\mathbb{T}) = Trans(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2) \rtimes GL(\mathbb{T})$.

Preuve

★ Soit $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ telle que $\exists!(\rho, \lambda) \in Trans(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2) \times GL(\mathbb{T})$, $f = \rho \circ \lambda$. Montrons que $f \in \mathcal{G}(\mathbb{T})$.

On pose $g = \tau \circ \vec{g}$. Où τ et \vec{g} sont associés à ρ et λ .

On pose $(x_1, x_2) = \tau(0, 0)$.

$g \in \mathcal{G}((\mathbb{R}^2, \|\cdot\|))$ et $f \circ \varphi = \varphi \circ g$.

En effet, soit $A = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$.

$f \circ \varphi(A) = f([a_1, a_2]) = \rho(\lambda(A)) = [x_1, x_2] + \lambda([a_1, a_2])$.

$\varphi_{\mathbb{T}} \circ g(A) = \varphi((x_1, x_2) + \vec{g}(a_1, a_2)) = [x_1, x_2] + \varphi \circ \vec{g}(a_1, a_2) = [x_1, x_2] +$

$\lambda \circ \varphi(a_1, a_2) = [x_1, x_2] + \lambda([a_1, a_2])$.

Soient $A, B \in \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Soit $(X, Y) \in A \times B$.

$\delta(f(A), f(B)) = \delta(f \circ \varphi(X), f \circ \varphi(Y)) =$

$\delta(\varphi \circ g(X), \varphi \circ g(Y)) = \delta(\varphi((x_1, x_2) + \vec{g}(X)), \varphi((x_1, x_2) + \vec{g}(Y))) =$

$\delta([x_1, x_2] + \varphi(\vec{g}(X)), [x_1, x_2] + \varphi(\vec{g}(Y))) = \delta(\varphi(\vec{g}(X)), \varphi(\vec{g}(Y)))$.

$\delta(f(A), f(B)) = \text{Inf}(\{\|X' - Y'\| \mid (X', Y') \in (\vec{g}(X) + \mathbb{Z}^2) \times (\vec{g}(Y) + \mathbb{Z}^2)\})$.

Pour $(X', Y') \in (\vec{g}(X) + \mathbb{Z}^2) \times (\vec{g}(Y) + \mathbb{Z}^2)$, $\exists K'_X, K'_Y \in \mathbb{Z}^2$ tels que $X, Y = \vec{g}(X) + K'_X, \vec{g}(Y) + K'_Y$

$\vec{g}(\mathbb{Z}^2) = \mathbb{Z}^2$ donc $\exists K_X, K_Y \in \mathbb{Z}^2, K'_X, K'_Y = \vec{g}(K_X), \vec{g}(K_Y)$.

Par linéarité de \vec{g} , $(X', Y') = (\vec{g}(X + K_X), \vec{g}(Y + K_Y))$.
Ainsi $\delta(f(A), f(B)) = \text{Inf}(\{\|\vec{g}(X + K_X) - \vec{g}(Y + K_Y)\| \mid K_X, K_Y \in \mathbb{Z}^2\})$.
 $\delta(f(A), f(B)) = \text{Inf}(\{\|X + K_X - (Y + K_Y)\| \mid K_X, K_Y \in \mathbb{Z}^2\})$. car \vec{g} est
une isométrie.
 $\delta(f(A), f(B)) = \text{Inf}(\{\|X' - Y'\| \mid (X', Y') \in (X + \mathbb{Z}^2) \times (Y + \mathbb{Z}^2)\})$
 $\delta(f(A), f(B)) = \text{Inf}(\{\|X' - Y'\| \mid (X', Y') \in A \times B\}) = \delta(A, B)$.
Donc f est une isométrie de \mathbb{T} .

★ Soit $f \in \mathcal{G}(\mathbb{T})$.

D'après le **théorème III.1**, il existe une isométrie g de $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ telle que
 $f \circ \varphi = \varphi \circ g$.

Il existe un unique couple $(\tau, \vec{g}) \in \text{Trans}(\mathbb{R}^2) \times \mathcal{GL}(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ tel que $g =$
 $\tau \circ \vec{g}$.

On pose $(x_1, x_2) = \tau(0, 0)$. On pose $\rho = \tau_{[x_1, x_2]}$ et $\lambda = \rho^{-1} \circ f$.

-Soit $X \in \mathbb{R}^2$.

$$f \circ \varphi(X) = \varphi \circ g(X) = \varphi(\tau(\vec{g}(X))) =$$

$$\varphi((x_1, x_2) + \vec{g}(X)) = [x_1, x_2] + \varphi(\vec{g}(X)) = \rho \circ \varphi \circ \vec{g}(A).$$

$$\text{Ainsi } f \circ \varphi = \rho \circ \varphi \circ \vec{g}.$$

$$\text{Donc } \lambda \circ \varphi = \varphi \circ \vec{g}.$$

$$\text{Enfin, } \rho \circ \lambda = f.$$

$$-f \circ \varphi(0, 0) = [x_1, x_2] + \varphi(\vec{g}(0, 0)) = [x_1, x_2] + \varphi(0, 0) = [x_1, x_2] + [0, 0] =$$

$$[x_1, x_2].$$

Soit $K \in \mathbb{Z}^2$. On pose $(k_1, k_2) = \vec{g}(K)$

$$f \circ \varphi(K) = [x_1, x_2] + [k_1, k_2].$$

$$\text{Donc } f([0, 0]) = f([0, 0]) + [k_1, k_2].$$

$$\text{Ainsi } [k_1, k_2] = [0, 0] \text{ donc } g(K) \in \mathbb{Z}^2 : \vec{g}(\mathbb{Z}^2) \subset \mathbb{Z}^2.$$

-Soit $K = (k, k') \in \mathbb{Z}^2$.

Par surjectivité de \vec{g} , il existe $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $g(X) = K$.

$$f \circ \varphi(A) = [x_1, x_2] + \varphi \circ \vec{g}(X).$$

$$\text{Donc } f([x, y]) = [x_1, x_2] + [k, k'] = f([0, 0]) + [k, k'] = f([0, 0]) \text{ car } [k, k'] =$$

$$[0, 0].$$

Par injectivité de f , $[x, y] = [0, 0]$ donc $X \in \mathbb{Z}^2$.

$$\text{Ainsi } \vec{g}(\mathbb{Z}^2) = \mathbb{Z}^2 : \lambda \in \mathcal{GL}(\mathbb{T}).$$

★ Montrons maintenant que $\text{Trans}(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2) \cap \mathcal{GL}(\mathbb{T}) = \{Id_{\mathbb{T}}\}$.

Soit $\rho \in \text{Trans}(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2)$ et soit $\lambda \in \mathcal{GL}_{\mathbb{Z}^2}$ tels que $\rho = \lambda$.

Alors $\rho([0, 0]) = \lambda([0, 0]) = \varphi(\vec{g}(0, 0))$ avec \vec{g} linéaire.

$$\text{Donc } \rho([0, 0]) = [0, 0] \text{ et } \rho = \lambda = Id_{\mathbb{T}}.$$

★ -Soient $\lambda, \gamma \in \mathcal{GL}(\mathbb{T})$.

$$\text{On écrit } \lambda \circ \varphi = \varphi \circ \vec{g} \text{ et } \gamma \circ \varphi = \varphi \circ \vec{h}$$

D'après la première partie de la démonstration, $\gamma \in \mathcal{G}(\mathbb{T})$ donc $\gamma^{-1} \in \mathcal{G}(\mathbb{T})$.

D'après la seconde partie de la démonstration, on peut écrire $\gamma^{-1} \circ \varphi = \varphi \circ f$ avec $f \in Trans(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2) \cup GL(\mathbb{T})$.

$$\gamma \circ \varphi \circ f = \lambda \circ \lambda^{-1} \circ \varphi = \varphi.$$

$$\text{Or } \varphi \circ \vec{h} \circ f = \varphi.$$

Par injectivité de φ sur $[0; 2\pi[$, $\vec{h} \circ f$ et $Id_{\mathbb{R}}$ sont des applications affines qui coïncident sur une partie d'intérieur non vide, elles sont donc égales, et donc $f = \vec{h}^{-1} \in GL_{\mathbb{Z}^2}(\mathbb{R}^2)$.

$$\lambda \circ \varphi \circ \vec{h}^{-1} = \lambda \circ \gamma^{-1} \circ \varphi$$

$$\text{Donc } \lambda \circ \gamma^{-1} \circ \varphi = \varphi \circ \vec{g} \circ \vec{h}^{-1}.$$

$GL_{\mathbb{Z}^2}(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ étant un groupe, $\vec{g} \circ \vec{h}^{-1} \in GL_{\mathbb{Z}^2}(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ donc $\lambda \circ \gamma^{-1} \in GL(\mathbb{T})$.

Ainsi $GL(\mathbb{T})$ est un sous-groupe de $\mathcal{G}(\mathbb{T})$.

-On montre facilement que $Trans(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2)$ est un sous-groupe de $\mathcal{G}(\mathbb{T})$.

★ On a bien montré $\mathcal{G}(\mathbb{T}) = Trans(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2) \rtimes GL(\mathbb{T})$.

Corollaire

$$\mathcal{G}(\mathbb{T}_p) = Trans(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2) \rtimes \{id, r_1, r_2, r_3, s_1, s_2, s_3, s_4\}$$

$$\text{Avec } \{id, r_1, r_2, r_3, s_1, s_2, s_3, s_4\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Preuve :

Il suffit d'identifier $GL(\mathbb{T}_p)$.

Je n'irai pas beaucoup plus loin dans la description de $GL(\mathbb{T})$, bien que sa finitude soit démontrée en partie IV.

On peut ajouter que $GL(\mathbb{T})$ admet un sous groupe particulier qui est celui des éléments de déterminant égal à 1.

La simulation informatique (**voir annexe**) permet de montrer que $GL(\mathbb{T}_p)$ n'est pas le plus grand groupe des isométries linéaires d'un tore algébrique, et qu'il n'y a pas a priori de caractérisation algébrique ou arithmétique simple des isométries de $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ parmi $Gl_2(\mathbb{Z})$.

IV - Interprétation et applications

Dans cette partie, on met en lien les différents résultats démontrés pour en déduire des relations et non-relations géométriques entre les tores étudiés.

1) Résultats négatifs généraux

On peut constater que même dans le cas particulier des tores algébriques, la géométrie n'est pas déterminée et le groupe d'isométrie ne la caractérise pas.

En effet :

- L'outil informatique révèle que les groupes d'isométrie de tores algébriques peuvent être assez variés. (**voir annexe**)
- Les tores \mathbb{T}_2 et \mathbb{T}_1 possèdent le même groupe d'isométrie et leurs groupes d'isométries sont isomorphes en tant que groupes topologiques mais ils ne possèdent pas les mêmes propriétés géométriques du premier ordre : entre deux points distincts A, B de \mathbb{T}_2 il existe au maximum 4 points équidistants de A et B (voir II.3) tandis qu'il existe deux points distincts A, B de \mathbb{T}_1 entre lesquels il en existe 2^{80} .

Cela laisse penser que le groupe d'isométrie n'est pas le bon outil pour caractériser la géométrie d'un espace métrique. On va voir dans ce qui suit qu'il est cependant un bon auxiliaire permettant de distinguer les tores algébriques entre lesquels il n'existe pas de transfert.

(note : je ne sais pas si dans le cas des tores algébriques, le groupe d'isométrie est un invariant topologique ; je n'ai pas réussi à démontrer que ce n'était pas le cas, c'est-à-dire à proposer deux tores algébriques aux groupes d'isométrie non isomorphes en tant que groupes)

2) Caractérisation des transferts entre tores algébriques

Lemme IV.1
 $\mathcal{GL}(\mathbb{T})$ est fini.

Preuve :

On rappelle que les éléments de $\mathcal{GL}(\mathbb{T})$ sont de la forme $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ où $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est dans $\mathcal{GL}_{\mathbb{Z}^2}(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ donc dans $GL_2(\mathbb{Z})$.

Par équivalence des normes dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, en notant $\|\cdot\|$ la norme subordonnée à $\|\cdot\|$ au départ et à l'arrivée, il existe $\mu \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in$

$$\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \left\| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right\|_{\infty} \leq \mu \|\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\|.$$

Or, pour $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{GL}_{\mathbb{Z}^2}(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$, $\|\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\| = 1$.

Ainsi, $\mathcal{GL}(\mathbb{T}) \subset \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid (a, b, c, d) \in \llbracket -\lceil \mu \rceil ; \lceil \mu \rceil \rrbracket \right\}$ qui est fini.

Lemme IV.2

Les éléments de $\mathcal{GL}(\mathbb{T})$ sont des endomorphismes du groupe \mathbb{T} .

Preuve :

Soit $f \in \mathcal{GL}(\mathbb{T})$.

$\exists \vec{g} \in \mathcal{GL}_{\mathbb{Z}^2}(\mathcal{P})$ tel que $f \circ \varphi = \varphi \circ \vec{g}$.

Soit $X, Y = A + \mathbb{Z}^2, B + \mathbb{Z}^2 \in \mathbb{T}$.

$f \circ \varphi(A + B) = \varphi \circ \vec{g}(A + B)$.

\vec{g} étant linéaire, $\vec{g}(A) + \vec{g}(B)$

Donc $f(X + Y) = \varphi(\vec{g}(A)) + \varphi(\vec{g}(B)) = f(X) + f(Y)$.

Lemme IV.3

Soit $\lambda \in \mathcal{GL}(\mathbb{T})$. Si λ est le carré d'un élément de $\mathcal{GL}(\mathbb{T})$ et si $\lambda^2 = id$, alors $\lambda = id$ ou $\lambda = -id$.

Preuve :

Soit $\lambda_0 \in \mathcal{GL}(\mathbb{T})$ tel que $\lambda = \lambda_0^2$.

On écrit $\lambda = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ avec $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{Z})$.

$\det(\lambda) \in \{1; -1\}$. Or $\det(\lambda) = (\det(\lambda_0))^2 \geq 0$.

Donc $\det(\lambda) = 1$.

Ainsi $\lambda^{-1} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

Comme $\lambda^2 = id$, $\lambda^{-1} = \lambda$ d'où $\lambda = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$.

$\lambda^2 = id$ donc $a \in \{1; -1\}$.

Donc $\lambda \in \{id; -id\}$.

Lemme IV.4

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $E_n = \{f \in \mathcal{G}(\mathbb{T}) \mid \omega(f) = 2^n \text{ et } \exists g \in \mathcal{G}(\mathbb{T}), f = g^2 \text{ et } Com(f) \text{ est infini}\}$.

$\forall n \in \mathbb{N}, \{\tau_{[\frac{1}{2^n}, 0]}; \tau_{[0, \frac{1}{2^n}]}\} \subset E_n \subset Trans(\mathbb{T})$.

Preuve :

Pour l'inclusion de droite, on procède par induction sur n , en traitant au préalable les cas $n = 0$ et $n = 1$.

★ Il n'y a qu'un élément de $\mathcal{G}(\mathbb{T})$ qui soit d'ordre 1, c'est $id = \tau_{[0,0]}$, qui satisfait bien les conditions de E_0 .

★ Soit $f \in E_1$.

$\exists(\rho, \lambda) \in Trans(\mathbb{T}) \times \mathcal{GL}(\mathbb{T})$ tel que $f = \rho \circ \lambda$.

On écrit $\rho = \tau_{[x,y]}$ avec $[x, y] \in \mathbb{T}$.

Soit $X \in \mathbb{T}$. $\lambda \circ \rho(X) = \lambda(X + [x, y]) = \lambda(X) + \lambda([x, y])$ d'après le **lemme**

IV.2.

C'est-à-dire que $\lambda \circ \rho = \tau_{\lambda([x,y])} \circ \lambda$.

$f^2 = \rho \circ \lambda \circ \rho \circ \lambda = \tau_{[x,y]} \circ \tau_{\lambda([x,y])} \circ \lambda^2 = id$.

Soit $g \in \mathcal{G}(\mathbb{T})$ telle que $g^2 = f$.

On écrit $g = \rho_g \circ \lambda_g$, on a donc :

$\lambda_g^2 = \lambda$.

D'après le **lemme IV.3**, $\lambda \in \{id; -id\}$.

-On suppose que $\lambda = -id$.

Alors $f = \tau_{[x,y]} \circ (-id)$.

f commute avec une infinité d'éléments de $\mathcal{G}(\mathbb{T})$.

Si pour tout $\gamma \in \mathcal{GL}(\mathbb{T})$ il existait un nombre fini de translations τ telles que $\tau \circ \gamma$ commute avec f , par finitude de $\mathcal{GL}(\mathbb{T})$ (**lemme IV.1**), f commuterait avec un nombre fini d'éléments de $\mathcal{G}(\mathbb{T})$.

Donc il existe $\gamma \in \mathcal{GL}(\mathbb{T})$ ainsi qu'une infinité de points $[a, b] \in \mathbb{T}$ tels que :

$$\tau_{[x,y]} \circ (-id) \circ \tau_{[a,b]} \circ \gamma = \tau_{[a,b]} \circ \gamma \circ \tau_{[x,y]} \circ (-id).$$

On applique l'égalité en $[x, y]$:

$$[x, y] - [a, b] - \gamma([x, y]) = [a, b]$$

Ainsi $[2a, 2b] = [x, y] - \gamma([x, y])$.

On pose $[x', y'] = \gamma([x, y])$.

$$\exists k_1, k_2 \in \mathbb{Z}, a = \frac{x-x'}{2} + \frac{k_1}{2} \text{ et } b = \frac{y-y'}{2} + \frac{k_2}{2}.$$

Ainsi k_1, k_2 étant pair ou impair, cela ne fait que quatre valeurs possibles pour $[a, b]$, ce qui est contradictoire.

-Donc $\lambda = id$ et $f = \tau_{[x,y]} \in Trans(\mathbb{T})$.

★ Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. On suppose le résultat vrai au rang n .

Soit $f \in E_{n+1}$.

-On écrit encore $f = \tau_{[x,y]} \circ \lambda$ avec $[x, y] \in \mathbb{T}$.

$$f^2 = \rho \circ \lambda \circ \rho \circ \lambda = \tau_{[x,y]} \circ \tau_{\lambda([x,y])} \circ \lambda^2.$$

Or f^2 est d'ordre 2^n et c'est le carré de f .

De plus, soit $g \in \mathcal{G}(\mathbb{T})$ qui commute avec f .

$g \circ f^2 = g \circ f \circ f = f \circ g \circ f = f \circ f \circ g = f^2 \circ g$ donc f^2 commute avec une infinité d'éléments de $\mathcal{G}(\mathbb{T})$.

Ainsi $f^2 \in E_n$.

Par hypothèse de récurrence, $f^2 \in Trans(\mathbb{T})$.

$$\tau_{[x,y]} \circ \tau_{\lambda([x,y])} \circ \lambda^2 = f^2 \circ id.$$

Comme $\mathcal{G}(\mathbb{T}) = Trans(\mathbb{T}) \rtimes \mathcal{GL}(\mathbb{T})$, on identifie notamment $\lambda^2 = id$.

Soit $f_0 = \tau_{[x_0, y_0]} \circ \lambda_0 \in \mathcal{G}(\mathbb{T})$ telle que $f = f_0^2$.

On a donc $\tau_{[x_0, y_0]} \circ \tau_{\lambda_0([x_0, y_0])} \circ \lambda_0^2 = \tau_{[x,y]} \circ \lambda$.

Ainsi $\lambda = \lambda_0^2$ et $\lambda^2 = id$.

Avec le **lemme IV.3**, on a $\lambda \in \{id; -id\}$.

Si on avait $\lambda = -id$, on aurait $f^2 = \tau_{[x,y]} \circ \tau_{-[x,y]} = id$. f^2 serait d'ordre 1, ce qui est contradictoire car f^2 est d'ordre $2^n \geq 2$.

Donc $\lambda = id$.

$f = \tau_{[x,y]} \in Trans(\mathbb{T})$, ce qui achève la récurrence.

★ Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n, Y_n = \tau_{[\frac{1}{2^n}, 0]}, \tau_{[0, \frac{1}{2^n}]}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. X_n, Y_n sont d'ordre 2^n .

(pour $k \in [1; 2^{n-1}]$, $X_n^k = \tau_{[\frac{k}{2^n}, 0]}$ avec $0 < \frac{k}{2^n} < 1$ donc $\frac{k}{2^n} \notin \mathbb{Z}$, de même pour Y_n^k)

$$X_n = X_{n+1}^2 \text{ et } Y_n = Y_{n+1}^2.$$

De plus iX_n et Y_n commutent avec tous les éléments de $Trans(\mathbb{T})$ qui est infini.

Ainsi $\{X_n; Y_n\} \subset E_n$.

On a bien montré $\forall n \in \mathbb{N}, \{\tau_{[\frac{1}{2^n}, 0]}; \tau_{[0, \frac{1}{2^n}]}\} \subset E_n \subset Trans(\mathbb{T})$.

Théorème V.1

Soient $\mathbb{T}_N, \mathbb{T}_{N'}$ deux tores algébriques.

Soit f un transfert $\mathbb{T}_N \xrightarrow{c} \mathbb{T}_{N'}$.

Il existe $[x_0, y_0] \in \mathbb{T}$ et $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{Z})$ telle que $f = \tau_{[x_0, y_0]} \circ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

Preuve :

★ Notons qu'en tant qu'espaces topologiques, \mathbb{T}_N et $\mathbb{T}_{N'}$ sont identiques.

L'application $\tau : [x, y] \mapsto \tau_{[x, y]}$ est à la fois un isomorphisme de groupes et une isométrie $\mathbb{T}_N \rightarrow \mathcal{G}(\mathbb{T}_N)$ et $\mathbb{T}_{N'} \rightarrow \mathcal{G}(\mathbb{T}_{N'})$, donc en particulier un isomorphisme de groupes topologiques $\mathbb{T} \rightarrow \mathcal{G}(\mathbb{T})$.

Par forte convexité de \mathbb{T}_N (voir II.b), f est continue. Par compacité et forte convexité de \mathbb{T}_N et $\mathbb{T}_{N'}$, d'après le corollaire de fin de partie I, f permet de définir un isomorphisme μ de groupes topologiques $\mathcal{G}(\mathbb{T}_N)$ et $\mathcal{G}(\mathbb{T}_{N'})$.

★ Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, \mu(E_n) = E_n$: soit $n \in \mathbb{N}$.

$\mu(E_n) = \{\mu(g) \mid \omega(g) = 2^n \text{ et } \exists h \in \mathcal{G}(\mathbb{T}), g = h^2 \text{ et } |Com(g)| \geq \aleph_0\}$.

$\mu(E_n) = \{\mu(g) \mid \omega(\mu(g)) = 2^n \text{ et } \exists h \in \mathcal{G}(\mathbb{T}), \mu(g) = \mu(h)^2 \text{ et } |Com(\mu(g))| = |Com(g)| \geq \aleph_0\}$.

$\mu(E_n) = \{\mu(g) \mid \omega(\mu(g)) = 2^n \text{ et } \exists h \in \mathcal{G}(\mathbb{T}), \mu(g) = h^2 \text{ et } |Com(\mu(g))| \geq \aleph_0\}$.

$\mu(E_n) = E_n$.

★ On en déduit que $\mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mu(E_n) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$.

On pose $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$. $E = \mu(E)$.

D'après le **lemme IV.4**, $\langle \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{\tau_{[\frac{1}{2^n}, 0]}; \tau_{[0, \frac{1}{2^n}]}\} \rangle \subset \langle E \rangle \subset \langle Trans(\mathbb{T}) \rangle$.

Soit $\{\tau_{[\frac{m_1}{2^{n_1}}, \frac{m_2}{2^{n_2}}]} \mid (m_1, n_1, m_2, n_2) \in \mathbb{N}^4\} \subset \langle E \rangle \subset \langle Trans(\mathbb{T}) \rangle$.

On pose $F = \{\tau_{[\frac{m_1}{2^{n_1}}, \frac{m_2}{2^{n_2}}]} \mid (m_1, n_1, m_2, n_2) \in \mathbb{N}^4\}$.

$\overline{F} = \overline{Trans(\mathbb{T})} = \overline{Trans(\mathbb{T})}$.

Donc $\langle \overline{E} \rangle = \overline{Trans(\mathbb{T})}$.

μ est un homéomorphisme donc $\mu(\langle \overline{E} \rangle) = \langle \overline{\mu(E)} \rangle$.

μ est un isomorphisme de groupes donc $\mu(\langle E \rangle) = \langle \mu(E) \rangle = \langle E \rangle$.

Enfin, $\mu(\langle \overline{E} \rangle) = \langle \overline{E} \rangle$; c'est-à-dire que $\mu(Trans(\mathbb{T})) = Trans(\mathbb{T})$.

La restriction ν de μ à $Trans(\mathbb{T})$ est un automorphisme du groupe topologique $Trans(\mathbb{T})$.

On en déduit que $\Psi = \tau^{-1} \circ \nu \circ \tau$ est un automorphisme du groupe topologique \mathbb{T} .

D'après la partie I, $\exists \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{Z})$, $\Psi = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

Soit $[x, y] \in \mathbb{T}$.

$\nu(\tau_{[x, y]}) = \tau_{[\Psi([x, y])]} = \tau_{[ax+by, cx+dy]}$.

$\mu(\tau_{[x, y]}) = \tau_{[ax+by, cx+dy]}$

Or $\mu(\tau_{[x, y]}) = f \circ \tau_{[x, y]} \circ f^{-1}$.

Donc $f \circ \tau_{[x, y]} = \tau_{[ax+by, cx+dy]} \circ f$.

On calcule en $[0, 0]$:

$f([x, y]) = f([0, 0]) + [ax + by, cx + dy]$.

On en déduit que $f = \tau_{f([0,0])} \circ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

Théorème IV.2

Soient (\mathbb{T}_N, δ_N) et $(\mathbb{T}_{N'}, \delta_{N'})$ deux tores algébriques provenant des normes N et N' tels que $\mathbb{T}_N \hookrightarrow \mathbb{T}_{N'}$.

Il existe $k \in \mathbb{R}_+^*$ et $\mu \in GL_2(\mathbb{Z})$ tels que $N' = kN \circ \mu$.

Preuve :

Soit $f : \mathbb{T}_N \hookrightarrow \mathbb{T}_{N'}$.

D'après ce qui précède, il existe $(\tau, \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}) \in Trans(\mathbb{T}) \times GL(\mathbb{T})$ tel que

$$f = \tau \circ \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}.$$

On pose $v = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$. v est lipschitzienne; soit L un facteur de Lipschitz strictement positif de v .

On a montré dans la preuve du **théorème III.1** qu'il existait $\varepsilon_N > 0$ tel que $\forall A, B \in \mathbb{R}^2, N(\overrightarrow{AB}) \leq \varepsilon_N \implies \delta_N(\varphi(A), \varphi(B)) = N(\overrightarrow{AB})$.

Il existe $\varepsilon_{N'} > 0$ analogue de ε_N pour N' . On pose $r = \min(\varepsilon_N, \frac{\varepsilon_{N'}}{L})$.

Soient $A, B \in B_a(O, r) - \{(0, 0)\}$.

On pose $t = \frac{N(\overrightarrow{OA})}{N(\overrightarrow{OB})}$. $t > 0$.

$$N(\overrightarrow{OA}) = tN(\overrightarrow{OB}) = N(t\overrightarrow{OB}).$$

Comme $N(\overrightarrow{OA}) = N(t\overrightarrow{OB}) \leq \varepsilon_N$, on a

$$N(\overrightarrow{OA}), N(t\overrightarrow{OB}) = (\delta_N(A + \mathbb{Z}^2, [0, 0]), \delta_N(tB + \mathbb{Z}^2, [0, 0])).$$

$$\text{Donc } \delta_N(A + \mathbb{Z}^2, [0, 0]) = \delta_N(tB + \mathbb{Z}^2, [0, 0]).$$

$$\text{Donc } \delta_{N'}(f(A + \mathbb{Z}^2), f([0, 0])) = \delta_{N'}(v(A + \mathbb{Z}^2), [0, 0]) = \delta_{N'}(v(tB + \mathbb{Z}^2), [0, 0]).$$

Comme $N'(v(\overrightarrow{OA})) = N(v(t\overrightarrow{OB})) \leq \varepsilon_{N'}$, on en déduit que

$$N'(v(\overrightarrow{OA})) = N'(v(t\overrightarrow{OB})) = tN'(v(\overrightarrow{OB})).$$

$$\text{On a } \frac{N'(v(\overrightarrow{OA}))}{N(\overrightarrow{OA})} = \frac{tN'(v(\overrightarrow{OB}))}{tN(\overrightarrow{OB})} = \frac{N'(v(\overrightarrow{OB}))}{N(\overrightarrow{OB})}$$

Donc $\frac{N' \circ v}{N}$ est constante sur $B(O, r) - \{(0, 0)\}$.

Par homogénéité de N et N' , elle est constante sur $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.

On note k cette valeur et on pose $\mu = v^{-1}$.

$k > 0$ par injectivité de v et on a $N' = kN \circ \mu$ sur $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.

Cette identité est vraie sur \mathbb{R}^2 tout entier.

Corollaire :

Si $\mathbb{T}_N \hookrightarrow \mathbb{T}_{N'}$ alors (\mathbb{R}^2, N) et (\mathbb{R}^2, N') sont linéairement isométriques. (la réciproque n'est pas vraie a priori)

Commentaires

Cette caractérisation est assez forte. Je n'ai pas eu le temps d'y réfléchir convenablement, mais il est peut-être possible d'en déduire un algorithme pouvant dire si deux tores algébriques sont liés par un transfert ou non à partir de fonctions évaluant les normes associées en certains points.

Il faut noter que la preuve du théorème III.1 (ainsi que celle du théorème de Mazur-Ulam) fait appel au fait qu'on s'intéresse à des isométries et n'utilise pas seulement leur qualité de transfert. On ne peut donc pas se dispenser de l'étude algébrique du groupe d'isométrie pour montrer que les transferts sont associés à des transformations affines du plan.

En tout cas, si une telle méthode existe, je ne l'ai pas trouvée. Il faut dire que la preuve du théorème de Mazur-Ulam a beau être assez simple, elle est très astucieuse, d'où la difficulté de traiter tout seul un cas plus général.

La classe d'équivalence d'un tore algébrique \mathbb{T}_N pour la relation d'existence de transfert est donc $\{\mathbb{T}_{kN \circ \mu} \mid (k, \mu) \in \mathbb{R}_+^* \times GL_2(\mathbb{Z})\}$.

On pourrait s'intéresser à cette classification, étudier d'éventuelles similitudes entre certaines classes de manière à proposer une notion plus générale que le transfert. Cela dit, rien n'indique que cela soit faisable.

V - Géométrie du tore euclidien

Théorème V

Soit (X, δ_X) un espace métrique.

Si (X, δ_X) et \mathbb{T}_2 possèdent la même géométrie, alors il existe un sous-espace dense E de \mathbb{T}_2 et un transfert $E \leftrightarrow X$.

De plus si X est compact ou complet, $\mathbb{T}_2 \leftrightarrow X$.

Preuve :

Dans toute la suite, on considère un espace métrique (X, δ) et on suppose qu'il vérifie toutes les formules clauses de \mathcal{L} vérifiées par \mathbb{T}_2 .

Le symbole \models est le symbole de conséquence sémantique pour les formules de \mathcal{L} .

La démonstration est séparée en trois grandes parties :

-une première pour se munir de traductions dans \mathcal{L} d'énoncés élémentaires faisant intervenir les distances

-une deuxième pour définir un "repère" sur \mathbb{T}_2 et X et un transfert entre deux parties respectives de \mathbb{T}_2 et X

-une troisième pour prolonger ce transfert par des arguments topologiques et être à-même de démontrer le théorème.

Des dessins aident à visualiser et prédire le fonctionnement des démonstrations. Je ne les inclus pas parce que c'est très long à faire proprement, mais j'en avais constamment à côté de moi pendant que je travaillais.

I - Traduction d'énoncés métriques en énoncés géométriques

1) Enoncés élémentaires.

Proposition 1

Les deux formules closes suivantes sont vérifiées par \mathbb{T}_2 :

$$F_1 = \forall a(\forall b(\forall c(\forall d(\exists e((ab \equiv ce \wedge \overline{ced}) \vee (cd \equiv ae \wedge \overline{aeb}))))))$$

$$F_2 = \forall a(\forall b(\forall c(\forall d(ab \equiv cd \iff \exists e((ab \equiv ce \wedge \overline{ced})) \wedge \exists f(cd \equiv af \wedge \overline{afb}))))))$$

Preuve :

★ Soient $A, B, C, D \in \mathbb{T}$.

-Si $C = D$, on pose $E = C + (B - A)$.

$$EC = AB \text{ et } CE = DE = DE + CD.$$

-Sinon, $CD \neq 0$.

-Si $AB \leq CD$, on pose $E = C + \frac{AB}{CD} \cdot (D - C)$.

$$\frac{AB}{CD} \in [0; 1] \text{ donc avec la } \mathbf{prop II.2}, CE = \frac{AB}{CD} CD = AB.$$

$$\text{On a } E = \frac{AB}{CD} \cdot D + (1 - \frac{AB}{CD}) \cdot C, D - E = (1 - \frac{AB}{CD}) \cdot (D - C) \text{ avec } 0 \leq (1 - \frac{AB}{CD}) \leq 1 \text{ donc } ED = (1 - \frac{AB}{CD}) CD = CD - AB.$$

De même avec **prop II.2**, $CE + ED = CD$.

-Si $AB \geq CD$, on pose $E = A + \frac{CD}{AB} \cdot (B - A)$.

$$\text{De même } AE = CD \text{ et } EB = AB - CD \text{ donc } AE + EB = AB.$$

C.Q.F.D

★ Si $AB = CD$ on a la conjonction des deux existences démontrées précédemment donc le sens direct de l'équivalence dans F_2 est vrai.

Si on a $AB = CE$ et $CD = AF$ et $CE + ED = CD$ et $AF + FB = AB$, on

a :

$$-AB + ED = CD \text{ donc } AB \leq CD.$$

$$-CD + FB = AB \text{ donc } CD \leq AB.$$

Donc $AB = CD$. Ainsi F_2 est vérifiée par \mathbb{T}_2 .

2) Comparaison de distances

On pose $F_{\leq}[a, b, c, d] = \exists e(ce \equiv ab \wedge \overline{ced})$.

On peut noter que $F_2 = \forall a(\forall b(\forall c(\forall d(ab \equiv cd \iff F_{\leq}[a, b, c, d] \wedge F_{\leq}[c, d, a, b]_{e \rightarrow f})))$.

Proposition 2

-Pour tout $(A, B, C, D) \in \mathbb{T}^4$, $AB \leq CD$ si et seulement si $F_{\leq}[A, B, C, D]$.

-Pour tout $(x, y, z, t) \in X^4$, $\delta_X(x, y) \leq \delta_X(z, t)$ si et seulement si $F_{\leq}[x, y, z, t]$.

Preuve :

★ Sens indirect.

Le sens indirect est vrai pour tout espace métrique, en effet si on a $\delta_X(x, y) = \delta_X(z, u)$ et $\delta_X(z, t) = \delta_X(z, u) + \delta_X(u, t)$, on a $\delta_X(x, y) = \delta_X(z, t) - \delta_X(u, t) \leq \delta_X(z, t)$.

★ Sens direct.

On a déjà montré le sens direct pour \mathbb{T}_2 en dans la **prop 1**.

Soit $(x, y, z, t) \in X^4$ avec $\delta_X(x, y) \leq \delta_X(z, t)$.

X vérifie F_1 donc $\exists u \in X$, $(xy \equiv_X zu$ et \overline{zut}_X) ou $(zt \equiv_X xu$ et \overline{xuy}_X).

Donc $\exists u \in X$, $xy \equiv_X zu$ et \overline{zut}_X ou $\delta_X(x, y) \geq \delta_X(z, t)$.

Donc $F_{\leq}[x, y, z, t]$ ou $xy \equiv_X zu$ et \overline{zut}_X donc $F_{\leq}[x, y, z, t]$ ou $F_{\leq}[x, y, z, t] \wedge F_{\leq}[z, t, x, y]_{u \rightarrow v}$ par modus ponens.

Donc $F_{\leq}[x, y, z, t]$, ce qui conclut la preuve.

3) Alignement

Proposition 3

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. La formule close suivante est vérifiée par \mathbb{T}_2 .

$$F_{3,n} = \forall(a, b)(\exists(a_1, \dots, a_{n-1})((aa_1 \equiv a_3a_3 \equiv \dots \equiv a_{n-1}b \wedge (\overline{aa_1a_2} \wedge \overline{aa_2a_3} \wedge \dots \wedge \overline{aa_{n-1}b})))$$

Preuve :

Soit $n \geq 2$. Soit $(A, B) \in \mathbb{T}^2$.

Pour $0 \leq i \leq n$ on pose $A_i = A + \frac{i}{n} \cdot (B - A)$.

($A_0 = A$ et $A_n = B$)

Soit i un entier compris entre 0 et $n - 1$. $0 \leq \frac{i}{n} \leq 1$ donc

$A_i A_{i+1} = \frac{AB}{n}$: tous les $A_i A_{i+1}$ sont égaux.

On a aussi $0 \leq \frac{i}{n} \leq 1$ donc $AA_i = \frac{i}{n} AB$.

Donc $AA_i + A_i A_{i+1} = \frac{i+1}{n} AB = AA_{i+1}$.

(on a utilisé à chaque fois la **prop II.2**)

4) Distances rationnelles

Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Soit $r \in \mathbb{Q}_+^*, x \leq 1$. $\exists!(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2, p \wedge q = 1$ et $r = \frac{p}{q}$.

On pose :

$$-F_{int,n}[a, b, c, d] = \exists(a_1, \dots, a_{n-1})(ca_1 \equiv a_1a_2 \equiv \dots \equiv a_{n-1}d \equiv ab \wedge \overline{ca_1a_2} \wedge \overline{ca_2a_3} \wedge \dots \wedge \overline{ca_{n-1}d}).$$

$$-F_{int,1}[a, b, c, d] = ab \equiv cd.$$

$$-F_{rat,r}[a, b, c, d] = \exists e(\exists f(F_{int,p}[e, f, a, b] \wedge F_{int,q}[e, f, c, d])).$$

$$-F_{rat,0}[a, b, c, d] = ab \equiv cc$$

Proposition 4

Soient $x, y, z, t \in X$. Soit $(n, r) \in \mathbb{N}^* \times [0; 1]_{\mathbb{Q}}$.

$$\star \delta_X(x, y) = \frac{1}{n}\delta(z, t) \iff X \models F_{int,n}[x, y, z, t]$$

$$\star \delta_X(x, y) = r\delta_X(z, t) \iff X \models F_{rat,r}[a, b, c, d].$$

Preuve :

\star Le cas $n = 1$ est trivial. Soit $n \geq 2$.

-Soit $(x, y, z, t) \in X^4$ tel que $X \models F_{r,n}[x, y, z, t]$.

Soit $(u_1, \dots, u_{n-1}) \in X^{n-1}$ vérifiant les conditions de la formule.

$$\delta_X(z, t) = \delta_X(z, u_{n-1}) + \delta_X(u_{n-1}, t) = \delta_X(z, u_{n-2}) + \delta_X(u_{n-2}, u_{n-1}) + \delta_X(u_{n-1}, t) = \dots = \delta_X(z, u_1) + \delta_X(u_1, u_2) + \dots + \delta_X(u_{n-2}, u_{n-1}) + \delta_X(u_{n-1}, t)$$

$$\delta_X(z, t) = n\delta_X(x, y). \text{ D'où l'implication indirecte.}$$

-Soit $(x, y, z, t) \in X^4$ tel que $\delta_X(x, y) = \frac{1}{n}\delta_X(z, t)$.

D'après **prop 3**, on a $X \models F_{3,n}[z, t]$ donc $\exists(u_1, \dots, u_{n-1}) \in X^{n-1}$ tel que $\forall i \in [1; n-2], u_i u_{i+1} \equiv_X z u_1 \equiv_X u_{n-1} t$ et $\overline{z u_1 u_2} \wedge \dots \wedge \overline{z u_{n-1} t}$.

De même que précédemment, on a $\delta_X(z, t) = n\delta_X(z, u_1)$. On en déduit que $\delta_X(x, y) = \delta_X(z, u_1)$

Donc on a $F_{r,n}[x, y, z, t]$. Il y a donc équivalence.

\star Le cas $r = 0$ est évident.

Soit donc $r = \frac{p}{q} \in [0; 1]_{\mathbb{Q}}$ avec $p \wedge q = 1$ et $0 < p \leq q$.

-Soit $(x, y, z, t) \in X^4$ tel qu'on ait $\delta_X(x, y) = r\delta_X(z, t)$.

D'après $F_{3,p}[x, y]$, $\exists(u, v) \in X^2, \delta_X(u, v) = \frac{1}{p}\delta_X(x, y)$.

D'après l'équivalence précédente, on a $X \models F_{int,p}[u, v, x, y]$.

$\delta_X(u, v) = \frac{p}{qp}\delta_X(z, t) = \frac{1}{q}\delta_X(z, t)$. Donc on a $X \models F_{int,q}[u, v, z, t]$.

-Soit $(x, y, z, t) \in X^4$ tel qu'il existe $u, v \in X$ tel que $X \models F_{int,p}[u, v, x, y]$ et $X \models F_{int,q}[u, v, z, t]$.

D'après l'équivalence précédente, on a $\delta_X(u, v) = \frac{1}{p}\delta_X(x, y) = \frac{1}{q}\delta_X(z, t)$.

Donc $\delta_X(x, y) = \frac{p}{q}\delta_X(z, t) = r\delta_X(z, t)$

II - Un transfert partiel

5) Repère et structure

On pose

$$\begin{aligned}
& -F_{rep,1}[o, m] = \forall a(F_{\leq}[o, a, o, m]). \\
& -F_{rep,2}[o, i, j] = \exists m(F_{rep,1}[o, m]ij \equiv om \wedge (\forall k(F_{milieu}[o, m, k] \implies (oi \equiv im \wedge ok \equiv ik \wedge oj \equiv jm \wedge ok \equiv jk)))) \\
& -F_s[o, i, j, i_1, i_2, j_1, j_2] = F_{rep,2}[o, i, j] \wedge F_{milieu}[o, i, i_1] \wedge F_{milieu}[o, i, i_2] \wedge F_{milieu}[o, j, j_1] \wedge F_{milieu}[o, j, j_2]. \\
& (F_{milieu}[a, b, c] = \overline{abc} \wedge ab \equiv bc)
\end{aligned}$$

Proposition 5.1

Les trois formules suivantes sont vérifiées par \mathbb{T}_2 :

$$\begin{aligned}
& \star F_4 = \forall o(\exists! m(F_{rep,1}[o, m])) \\
& \star F_5 = \forall o(\exists!\{i, j\}(F_{rep,2}[o, i, j])) \\
& \star F_6 = \forall o(\exists!\{\{i, j\}, \{i_1, i_2, j_1, j_2\}\}(F_s[o, i, j, i_1, i_2, j_1, j_2]))
\end{aligned}$$

Preuve

$$\star \text{ Soit } A = [a_1, a_2] \in \mathbb{T}_2.$$

$$M = A + [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \text{ vérifie } F_{rep,1}[A, M] :$$

$$\text{En effet soit } B = [b_1, b_2] \in \mathbb{T}_2.$$

$$\text{On pose } \kappa((a_1, a_2) - (b_1, b_2)) = (k_1, k_2).$$

$$\text{On a } (|a_1 - b_1 + k_1|, |a_2 - b_2 + k_2|) \in [0; \frac{1}{2}]^2.$$

D'après le corollaire des **lemmes II.1 et II.2**, on a :

$$AB = \|(a_1, a_2) - (b_1, b_2) + \kappa((a_1, a_2) - (b_1, b_2))\|_2 = \sqrt{|a_1 - b_1 + k_1|^2 + |a_2 - b_2 + k_2|^2} \leq \sqrt{\frac{1}{2}} \leq AM.$$

$$\text{De plus il n'y a égalité que si } |a_1 - b_1 + k_1| = \frac{1}{2} \text{ et } |a_2 - b_2 + k_2| = \frac{1}{2}. \text{ Alors } [b_1, b_2] = [a_1 \pm \frac{1}{2} + k_1, a_2 \pm \frac{1}{2} + k_2] = [a_1 \pm \frac{1}{2}, a_2 \pm \frac{1}{2}] = M.$$

$$\star \text{ -Soit } A = [a_1, a_2] \in \mathbb{T}_2.$$

$$\text{On a vu qu'il existait un unique élément } M = A + [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \text{ tel que}$$

$$\mathbb{T}_2 \models F_{rep,1}[A, M].$$

$$\text{En posant } I_1 = A + [\frac{1}{2}, 0] \text{ et } J_1 = A + [0, \frac{1}{2}] \text{ on a } F_{rep,2}[A, I_1, J_1].$$

-Soient I, J deux points distincts tels que $\mathbb{T}_2 \vDash F_{rep,2}[A, I, J]$. Soit $M = A + [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Soit $X \in A$. Soit $Y \in I$ tel que $AI = XY$.

$\exists \epsilon_1, \epsilon_2 \in \{-1; 1\}$ tels que $Y \in X + \widehat{[0; \frac{\epsilon_1}{2}]} \times \widehat{[0; \frac{\epsilon_2}{2}]}$.

On pose $Z = X + (\frac{\epsilon_1}{2}, \frac{\epsilon_2}{2})$. $Z \in M$.

De plus, $AM = XZ$ car $\overrightarrow{XZ} \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]^2$ et $IM = YZ$ car $\overrightarrow{YZ} \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]^2$.

Ainsi XYZ est isocèle en Y .

Soit $U = X + \frac{1}{2}\overrightarrow{XZ}$. D'après les **prop II.3 et II.2**, $\varphi(U)$ est un milieu de $[AM]$ donc $A\varphi(U) = \varphi(U)I$.

$\overrightarrow{XU}, \overrightarrow{UZ}, \overrightarrow{YU} \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]^2$ donc $XU = YU = ZU$.

De plus, $XY = YZ$, c'est-à-dire que XYU et YUZ sont isocèles en U et semblables.

Or $\pi = \widehat{XUY} + \widehat{YUZ} = 2\widehat{XUY}$ donc $\widehat{XUY} = \frac{\pi}{2}$.

XYU étant isocèle en U , $\widehat{XYU} = \frac{\pi}{4}$. De même, $\widehat{UYZ} = \frac{\pi}{4}$.

D'où $\widehat{XYZ} = \widehat{XYU} + \widehat{UYZ} = \frac{\pi}{2}$: XYZ est rectangle isocèle.

On en déduit que Y est un sommet de l'unique carré dont une diagonale est $[XZ]$: $Y \in \{X + (\frac{\epsilon_1}{2}, 0); X + (0, \frac{\epsilon_2}{2})\}$.

Donc $I \in \{A + [\frac{\epsilon_1}{2}, 0]; A + [0, \frac{\epsilon_2}{2}]\}$.

On montre de même que $J \in \{A + [\frac{\epsilon_1}{2}, 0]; A + [0, \frac{\epsilon_2}{2}]\}$.

$IJ = OM$ donc $I \neq J$ et l'ensemble $\{I, J\}$ tel que $\mathbb{T}_2 \vDash F_{rep,2}[A, I, J]$ est unique égal à $\{A + [\frac{\epsilon_1}{2}, 0]; A + [0, \frac{\epsilon_2}{2}]\} = \{A + [\frac{1}{2}, 0]; A + [0, \frac{1}{2}]\}$

★ On fixe $A = [a_1, a_2]$ et on choisit $I = [i_1, i_2]$ et $J = [j_1, j_2]$ vérifiant $F_{rep,2}[A, I, J]$.

$\{I, J\} = \{A + [\frac{1}{2}, 0]; A + [0, \frac{1}{2}]\}$.

D'après les **prop II.3 et II.2**, $[AI]$ et $[AJ]$ possèdent exactement deux milieux I_1, I_2 et J_1, J_2 et on a

$\{-I_1; I_2; J_1; J_2\} = \{A + \frac{1}{2} \cdot (I - A); A + s_3(\frac{1}{2} \cdot (I - A)); A + \frac{1}{2} \cdot (J - A); A + s_1(\frac{1}{2} \cdot (J - A))\}$ si $I = A + [\frac{1}{2}, 0]$.

$\{-I_1; I_2; J_1; J_2\} = \{A + \frac{1}{2} \cdot (I - A); A + s_3(\frac{1}{2} \cdot (I - A)); A + \frac{1}{2} \cdot (J - A); A + s_1(\frac{1}{2} \cdot (J - A))\}$ si $I = A + [0, \frac{1}{2}]$.

Dans tous les cas, $(\{I, J\}, \{I_1; I_2; J_1; J_2\}) = (\{A + [\frac{1}{2}, 0]; A + [0, \frac{1}{2}]\}, \{[A + \frac{1}{4}, 0]; A - [\frac{1}{4}, 0]; A + [0, \frac{1}{4}]; A - [0, \frac{1}{4}]\})$

Soit $\{I', J', I'_1, I'_2, J'_1, J'_2\}$ un autre ensemble de points satisfaisant $F_s[I', J', I'_1, I'_2, J'_1, J'_2]$.

D'après ce qui précède, $\{I', J'\} = \{I, J\}$.

Si $I' = I$ alors $J' = J$ et $\{I'_1, I'_2, J'_1, J'_2\} = \{I_1, I_2, J_1, J_2\}$.

Si $I' = J$ alors $J' = I$ et $\{I'_1, I'_2, J'_1, J'_2\} = \{I_1, I_2, J_1, J_2\}$, ce qu'il fallait démontrer.

La preuve permet de dénombrer les différents $(A, I, J, I_1, I_2, J_1, J_2)$ vérifiant $\mathbb{T}_2 \models F_s[A, I, J, I_1, I_2, J_1, J_2]$. Il y a une infinité de possibilités pour le choix de A , et une fois A choisi, on a :

- $I = A + [\frac{1}{2}, 0]$ et $J = A + [0, \frac{1}{2}]$, $I_1 = A + [\frac{1}{4}, 0]$ et $I_2 = A - [\frac{1}{4}, 0]$,
 $J_1 = A + [0, \frac{1}{4}]$ et $J_2 = A - [0, \frac{1}{4}]$. (1.a)
- $I = A + [\frac{1}{2}, 0]$ et $J = A + [0, \frac{1}{2}]$, $I_1 = A + [\frac{1}{4}, 0]$ et $I_2 = A - [\frac{1}{4}, 0]$,
 $J_1 = A - [0, \frac{1}{4}]$ et $J_2 = A + [0, \frac{1}{4}]$. (1.b)
- $I = A + [\frac{1}{2}, 0]$ et $J = A + [0, \frac{1}{2}]$, $I_1 = A - [\frac{1}{4}, 0]$ et $I_2 = A + [\frac{1}{4}, 0]$,
 $J_1 = A + [0, \frac{1}{4}]$ et $J_2 = A - [0, \frac{1}{4}]$. (1.c)
- $I = A + [\frac{1}{2}, 0]$ et $J = A + [0, \frac{1}{2}]$, $I_1 = A - [\frac{1}{4}, 0]$ et $I_2 = A + [\frac{1}{4}, 0]$,
 $J_1 = A - [0, \frac{1}{4}]$ et $J_2 = A + [0, \frac{1}{4}]$. (1.d)
- $I = A + [0, \frac{1}{2}]$ et $J = A + [\frac{1}{2}, 0]$, $I_1 = A + [0, \frac{1}{4}]$ et $I_2 = A - [0, \frac{1}{4}]$,
 $J_1 = A + [\frac{1}{4}, 0]$ et $J_2 = A - [\frac{1}{4}, 0]$. (2.a)
- $I = A + [0, \frac{1}{2}]$ et $J = A + [\frac{1}{2}, 0]$, $I_1 = A + [0, \frac{1}{4}]$ et $I_2 = A - [0, \frac{1}{4}]$,
 $J_1 = A - [\frac{1}{4}, 0]$ et $J_2 = A + [\frac{1}{4}, 0]$. (2.b)
- $I = A + [0, \frac{1}{2}]$ et $J = A + [\frac{1}{2}, 0]$, $I_1 = A - [0, \frac{1}{4}]$ et $I_2 = A + [0, \frac{1}{4}]$,
 $J_1 = A + [\frac{1}{4}, 0]$ et $J_2 = A - [\frac{1}{4}, 0]$. (2.c)
- $I = A + [0, \frac{1}{2}]$ et $J = A + [\frac{1}{2}, 0]$, $I_1 = A - [0, \frac{1}{4}]$ et $I_2 = A + [0, \frac{1}{4}]$,
 $J_1 = A - [\frac{1}{4}, 0]$ et $J_2 = A + [\frac{1}{4}, 0]$. (2.d)

Proposition 5.2

Soit $(A, I, J, I_1, I_2, J_1, J_2) \in \mathbb{T}^7$ tel que $\mathbb{T}_2 \models F_s[A, I, J, I_1, I_2, J_1, J_2]$.

Il existe une isométrie g de \mathbb{T}_2 telle que :

$$(A, I, J, I_1, I_2, J_1, J_2) = (g([0, 0]), g([\frac{1}{2}, 0]), g([0, \frac{1}{2}]), g([\frac{1}{4}, 0]), g([\frac{3}{4}, 0]), g([0, \frac{1}{4}]), g([0, \frac{3}{4}])).$$

Preuve :

On constate simplement, en rappelant que $\mathcal{G}(\mathbb{T}_2) = Trans(\mathbb{T}) \rtimes \{id; r_1, r_2, r_3, s_1, s_2, s_3, s_4\}$.

- (1.a) : $g = \tau_A$.
- (1.b) : $g = \tau_A \circ s_1$.
- (1.c) : $g = \tau_A \circ s_3$.
- (1.d) : $g = \tau_A \circ r_2$.
- (2.a) : $g = \tau_A \circ s_2$.
- (2.b) : $g = \tau_A \circ r_1$.
- (2.a) : $g = \tau_A \circ r_3$.
- (2.b) : $g = \tau_A \circ s_4$.

6) Enrichissement du langage

Soient $o, i, j, i_1, i_2, j_1, j_2$ des symboles de que l'on suppose absents de l'ensemble des symboles de variable.

On a vu qu'en notant $O = [0, 0]; I = [\frac{1}{2}, 0]; J = [0, \frac{1}{2}]; I_1 = [\frac{1}{4}, 0]; I_2 = [\frac{3}{4}, 0]; J_1 = [0, \frac{1}{4}]; J_2 = [0, \frac{3}{4}]$, on a $\mathbb{T}_2 \models F_s[O, I, J, I_1, I_2, J_1, J_2]$.

\mathbb{T}_2 satisfait la formule close $\exists(a, b, c, d, e, f, g)(F_s[a, b, c, d, e, f, g])$ donc il en est de même pour X . On fixe $o_X; i_X; j_X; i_X^1; i_X^2; j_X^1; j_X^2 \in X$ tels que $X \models F_s[o_X, i_X, j_X, i_X^1, i_X^2, j_X^1, j_X^2]$.

On enrichit le langage \mathcal{L} avec les symboles de constante. On note \mathcal{L}' le langage obtenu, les symboles de constante sont interprétés par leurs analogues dans \mathbb{T}_2 et X .

Proposition 6

X vérifie les mêmes formules closes de \mathcal{L}' que \mathbb{T}_2 .

Preuve :

Soit F une formule clause de \mathcal{L}' telle que $\mathbb{T}_2 \models_{\mathcal{L}'} F$.

Si F ne contient aucune occurrence d'un symbole de constante, alors c'est une formule close de \mathcal{L} donc $\mathbb{T} \models_{\mathcal{L}} F$ donc $X \models_{\mathcal{L}} F$ donc $X \models_{\mathcal{L}'} F$.

On note $F'[a, b, c, d, e, f, g]$ la formule résultant de la substitution dans F de chaque symbole de o par a , de i par b , etc. (si toutes les constantes n'apparaissent pas dans F la démonstration est similaire)

Soit $(A, B, C, D, E, F, G) \in \mathbb{T}^7$ tel qu'on ait $F_s[A, B, C, D, E, F, G]$.

D'après la **prop 5.2**, il existe une isométrie ν de \mathbb{T}_2 telle que

$$(\nu(J), \nu(I), \nu(J), \nu(I_1), \nu(I_2), \nu(J_1), \nu(J_2)) = (A, B, C, D, E, F, G).$$

ν est une isométrie de \mathbb{T}_2 donc un automorphisme de \mathcal{L} -structure.

Ainsi, $F_s[O, I, J, I_1, I_2, J_1, J_2] \wedge F'[O, I, J, I_1, I_2, J_1, J_2]$ entraîne $F_s[A, B, C, D, E, F, G] \wedge F[A, B, C, D, E, F, G]$. (**prop I.2**)

On vient de montrer que \mathbb{T}_2 satisfait la formule clause de \mathcal{L}

$$\forall(a, b, c, d, e, f, g)(F_s[a, b, c, d, e, f, g] \implies F'[a, b, c, d, e, f, g]).$$

On en déduit que $X \models_{\mathcal{L}} \forall(a, b, c, d, e, f, g)(F_s[a, b, c, d, e, f, g] \implies F'[a, b, c, d, e, f, g])$ et on sait que $X \models_{\mathcal{L}} F_s[o_X, i_X, j_X, i_X^1, i_X^2, j_X^1, j_X^2]$.

Donc $X \models_{\mathcal{L}} F'[o_X, i_X, j_X, i_X^1, i_X^2, j_X^1, j_X^2]$, c'est-à-dire $X \models_{\mathcal{L}'} F$.

(le fait que \mathbb{T}_2 satisfasse les mêmes formules clauses de \mathcal{L}' satisfaites par X se déduit du fait que la théorie de \mathbb{T}_2 est complète)

A partir d'ici, le symbole \models est le symbole de conséquence sémantique pour les formules de \mathcal{L}' .

7) Points rationnels

Soient $r_1, r_2 \in [0; 1]_{\mathbb{Q}}$. On pose :

$$-F_{rat, r_1, r_2}[a] = \exists b(\exists(c, d)(\overline{oci_1} \wedge \overline{odj_1} \wedge F_{rat, \frac{r_1}{4}}[o, c, o, i]) \wedge F_{rat, \frac{r_2}{4}}[o, d, o, j] \wedge oc \equiv bd \wedge od \equiv bc \wedge ob \equiv cd) \wedge \overline{oba} \wedge F_{rat, \frac{1}{4}}[o, b, o, a])$$

$$-F_{rat, -r_1, r_2}[a] = \exists b(\exists(c, d)(\overline{oci_2} \wedge \overline{odj_1} \wedge F_{rat, -\frac{r_1}{4}}[o, c, o, i]) \wedge F_{rat, \frac{r_2}{4}}[o, d, o, j] \wedge oc \equiv bd \wedge od \equiv bc \wedge ob \equiv cd) \wedge \overline{oba} \wedge F_{rat, \frac{1}{4}}[o, b, o, a])$$

$$-F_{rat, r_1, -r_2}[a] = \exists b(\exists(c, d)(\overline{oci_1} \wedge \overline{odj_2} \wedge F_{rat, \frac{r_1}{4}}[o, c, o, i]) \wedge F_{rat, -\frac{r_2}{4}}[o, d, o, j] \wedge oc \equiv bd \wedge od \equiv bc \wedge ob \equiv cd) \wedge \overline{oba} \wedge F_{rat, \frac{1}{4}}[o, b, o, a])$$

$$-F_{rat, -r_1, -r_2}[a] = \exists b(\exists(c, d)(\overline{oci_2} \wedge \overline{odj_2} \wedge F_{rat, -\frac{r_1}{4}}[o, c, o, i]) \wedge F_{rat, -\frac{r_2}{4}}[o, d, o, j] \wedge oc \equiv bd \wedge od \equiv bc \wedge ob \equiv cd) \wedge \overline{oba} \wedge F_{rat, \frac{1}{4}}[o, b, o, a])$$

Proposition 7

Soit $A = [a_1, a_2] \in \mathbb{T}$, soient $r_1, r_2 \in [-1; 1]_{\mathbb{Q}}$.

$$\mathbb{T}_2 \models F_{rat, r_1, r_2}[A] \iff A = [\frac{r_1}{2}, \frac{r_2}{2}].$$

Preuve :

On montre l'équivalence pour le cas $r_1 \geq 0$ et $r_2 \leq 0$, ce qui correspond au troisième type de formule.

★ On suppose qu'il existe $A \in \mathbb{T}$ tel que $\mathbb{T}_2 \models F_{rat, r_1, r_2}[A]$ et on fixe un tel point.

-Soient $B, C, D \in \mathbb{T}$ satisfaisant les conditions.

$I_1, J_2 \in \{[x, y] \mid (x, y) \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]^2\}$ donc d'après la **prop II.3**,

$$C = O + \frac{OC}{OI_1} \cdot (I_1 - O) = \frac{r_1 OI}{4OI_1} \cdot J_1 = \frac{r_1 OI_1}{2OI_1} \cdot [\frac{1}{4}, 0] = \frac{r_1}{2} \cdot [\frac{r_1}{8}, 0].$$

$$D = \frac{OD}{OJ_2} \cdot J_2 = \frac{-r_2 OJ}{4OJ_2} \cdot J_2 = (-\frac{r_2 OJ_2}{2OJ_2}) \cdot J_2 = (-\frac{r_2}{2}) \cdot [0, -\frac{1}{4}] = [0, \frac{r_2}{8}].$$

On pose $Y = (\frac{r_1}{8}, 0)$, $T = (0, \frac{r_2}{8})$. $(Y, T) \in C \times D$ et $\overrightarrow{YT} \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]^2$ donc d'après le **lemme II.2**, $YT = CD$.

Soit $Z \in B$ tel que $OZ = OB$. (le premier point O est celui du plan, le second celui du tore)

$$YZ \leq YO + OZ \leq YO + OB \leq YO + CD \leq \frac{r_1}{8} + \sqrt{(\frac{r_1}{8})^2 + (\frac{r_2}{8})^2} \leq \frac{1}{8} + \sqrt{\frac{1}{8}} \leq \frac{1}{2}.$$

On en déduit par contraposée que $\overrightarrow{YZ} \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]^2$ et avec le **lemme II.2** que $YZ = CB$.

De même, $ZT = BD$.

Le quadrilatère $OYZT$ vérifie donc $OZ = YT$, $OY = ZT$, $OT = ZY$, c'est donc un rectangle, et en particulier un parallélogramme.

Ainsi $\overrightarrow{OZ} = \overrightarrow{OY} + \overrightarrow{OT} = (\frac{r_1}{8}, \frac{r_2}{8})$ donc $B = \varphi_{\mathbb{T}}(\overrightarrow{OZ}) = [\frac{r_1}{8}, \frac{r_2}{8}]$.

Soit $(a_1, a_2) \in]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]^2$ tel que $A = [a_1, a_2]$.

D'après la **prop II.3**, $\exists f \in \{id; s_1; r_2; s_3\}$ telle que $B = f(\frac{OB}{OA}.A) = f(\frac{1}{4}.A) = f([\frac{a_1}{4}, \frac{a_2}{4}])$.

Toujours d'après **prop II.3**, un des quatre cas suivants se produit :

- $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}$. Alors $B = [\frac{r_1}{8}, \frac{r_2}{8}] \in \{[\frac{1}{8}, \frac{1}{8}]; [\frac{1}{8}, -\frac{1}{8}]; [-\frac{1}{8}, -\frac{1}{8}]; [-\frac{1}{8}, \frac{1}{8}]\}$.
Comme $r_1 \geq 0$ et $r_2 \leq 0$, par injectivité de φ sur $] -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]^2$, $B = [\frac{1}{8}, -\frac{1}{8}]$ puis $(r_1, r_2) = (1, -1)$. Donc $A = [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] = [\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}] = [\frac{r_1}{2}, \frac{r_2}{2}]$.
- $a_1 = \frac{1}{2}$ et $a_2 \neq \frac{1}{2}$. Alors $B = [\frac{r_1}{8}, \frac{r_2}{8}] \in \{[\frac{1}{8}, \frac{a_2}{4}]; [-\frac{1}{8}, \frac{a_2}{4}]\}$.
Ici encore, la condition $(\frac{r_1}{8}, \frac{r_2}{8}, \frac{1}{8}, \frac{a_2}{4}, -\frac{a_2}{4}) \in (]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]^2)^5$ et $r_1 \geq 0$ impose $B = [\frac{1}{8}, \frac{a_2}{4}]$ puis $(r_1, r_2) = (1, 2a_2)$. Donc $A = [\frac{1}{2}, a_2] = [\frac{r_1}{2}, \frac{r_2}{2}]$.
- De même si $a_2 = \frac{1}{2}$ et $a_1 \neq \frac{1}{2}$, $B \in \{[\frac{a_1}{4}, \frac{1}{8}]; [\frac{a_1}{4}, -\frac{1}{8}]\}$, et la condition $r_2 \leq 0$ ainsi que l'injectivité de φ sur $] -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]^2$ imposent $B = [\frac{a_1}{4}, -\frac{1}{8}]$, puis $(r_1, r_2) = (2a_1, -\frac{1}{2})$ donc $A = [a_1, \frac{1}{2}] = [a_1, -\frac{1}{2}] = [\frac{r_1}{2}, \frac{r_2}{2}]$.
- Si a_1 et a_2 sont distincts de $\frac{1}{2}$, alors $B = [\frac{r_1}{8}, \frac{r_2}{8}] = [\frac{a_1}{4}, \frac{a_2}{4}]$ et toujours par injectivité de φ sur $] -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]^2$, $A = [\frac{r_1}{2}, \frac{r_2}{2}]$.

On a bien montré $\forall A, \mathbb{T}_2 \models F_{rat, r_1, r_2}[A] \implies A = [\frac{r_1}{2}, \frac{r_2}{2}]$.

★ Réciproquement, on pose $A = [\frac{r_1}{2}, \frac{r_2}{2}]$, $B = [\frac{r_1}{8}, \frac{r_2}{8}]$, $C = [\frac{r_1}{8}, 0]$ et $D = [0, \frac{r_2}{8}]$.

D'après les **prop II.3** et **prop II.2**, B est entre O et A et $OB = \frac{1}{4}OA$.

$r_1 \geq 0$ et $r_2 \leq 0$ donc $\frac{r_1}{2}, \frac{-r_2}{2} \in [0; 1]$ et d'après **prop II.3** :

- $C = \frac{r_1}{2}.I_1$ est entre O et I_1

- $D = \frac{-r_2}{2}.J_2$ est entre O et J_2

On a $OC = \frac{r_1}{8} = \frac{r_1}{4} \frac{1}{2} = \frac{r_1}{4}OI$ et $OD = \frac{-r_2}{8} = \frac{-r_2}{4}OJ$.

Enfin, $OB = CD$ et $OC = BD$ et $OD = BC$.

Donc $\mathbb{T}_2 \models F_{rat, r_1, r_2}[A]$.

On abrègera les formules $F_{rat, r_1, r_2}[a]$ en $a(r_1, r_2)$. Et les $X \models F_{rat, r_1, r_2}[x]$ en $x(r_1, r_2)$.

8) Quelques points supplémentaires

Soit $(r_1, r_2) \in ([0; \frac{1}{2}]_{\mathbb{Q}})^2 - \{(0, 0); (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}$. On pose :
 $F_{alg, r_1, r_2}[a] = F_{\leq}[a, i_1, a, i_2] \wedge F_{\leq}[a, j_1, a, j_2] \wedge \overline{oaam} \wedge F_{i_1, j_1}[a] \wedge \exists b(b(2r_1, 2r_2) \wedge oa \equiv ob)$.

Proposition 8

Soit $(r_1, r_2) \in ([0; \frac{1}{2}]_{\mathbb{Q}})^2 - \{(0, 0); (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}$. Soit $A \in \mathbb{T}$.

$$(\mathbb{T}_2 \models F_{alg, r_1, r_2}[A]) \iff A = [\sqrt{\frac{r_1^2+r_2^2}{2}}, \sqrt{\frac{r_1^2+r_2^2}{2}}].$$

Preuve :

★ Soit $(r_1, r_2) \in ([0; \frac{1}{2}]_{\mathbb{Q}})^2 - \{(0, 0); (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}$. Notons qu'on a $\sqrt{\frac{r_1+r_2^2}{2}} \in]0; \frac{1}{2}[$.

On pose $A = [\sqrt{\frac{r_1^2+r_2^2}{2}}, \sqrt{\frac{r_1^2+r_2^2}{2}}]$.

$OA + AM = OM$ et en considérant $B = [r_1, r_2]$ on a $OB = OA$ et $B(2r_1, 2r_2)$.

$A - I_1 = [\sqrt{\frac{r_1^2+r_2^2}{2}} - \frac{1}{4}, \sqrt{\frac{r_1^2+r_2^2}{2}}]$ avec $(\sqrt{\frac{r_1^2+r_2^2}{2}} - \frac{1}{4}, \sqrt{\frac{r_1^2+r_2^2}{2}}) \in]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]^2$ donc d'après le **lemme II.2**,

$$AI_1^2 = (\sqrt{\frac{r_1^2+r_2^2}{2}} - \frac{1}{4})^2 + \frac{r_1^2+r_2^2}{2}.$$

$$A - I_2 = [\sqrt{\frac{r_1^2+r_2^2}{2}} + \frac{1}{4}, \sqrt{\frac{r_1^2+r_2^2}{2}}].$$

Si $\sqrt{\frac{r_1^2+r_2^2}{2}} > \frac{1}{4}$, alors $(\sqrt{\frac{r_1^2+r_2^2}{2}} + \frac{1}{4} - 1, \sqrt{\frac{r_1^2+r_2^2}{2}}) \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]^2$ donc d'après **lemme II.2**,

$$AI_2^2 = (\sqrt{\frac{r_1^2+r_2^2}{2}} + \frac{1}{4} - 1)^2 + \frac{r_1^2+r_2^2}{2}.$$

$$\text{D'où } AI_2^2 - AI_1^2 = 1 - \frac{1}{2} - 2\sqrt{\frac{r_1^2+r_2^2}{2}} = \frac{1}{2} - 2\sqrt{\frac{r_1^2+r_2^2}{2}} \geq 0.$$

Sinon, $(\sqrt{\frac{r_1^2+r_2^2}{2}} + \frac{1}{4}, \sqrt{\frac{r_1^2+r_2^2}{2}}) \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]^2$ donc d'après **lemme II.2**,

$$AI_2^2 = (\sqrt{\frac{r_1^2+r_2^2}{2}} + \frac{1}{4})^2 + \frac{r_1^2+r_2^2}{2}.$$

$$AI_2^2 - AI_1^2 = \sqrt{\frac{r_1^2+r_2^2}{2}} \geq 0.$$

Dans le deux cas, $AI_2 \geq AI_1$.

De même, $AJ_2 \geq AJ_1$.

On a montré que $\mathbb{T}_2 \models F_{alg, r_1, r_2}[A]$.

★ Soit A un point satisfaisant $F_{alg, r_1, r_2}[a]$.

D'après la **prop II.3**, il existe $f \in \{id; s_1; s_3; r_2\}$ telle que

$$A = O + f\left(\frac{OA}{OM} \cdot (M - O)\right) = O + f\left(\frac{OB}{OM} \cdot (M - O)\right) = f\left(2\sqrt{\frac{r_1^2+r_2^2}{2}} \cdot \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right) = f\left([\sqrt{\frac{r_1^2+r_2^2}{2}}, \sqrt{\frac{r_1^2+r_2^2}{2}}]\right).$$

-Si $f = s_1$, $A = [\sqrt{\frac{r_1^2+r_2^2}{2}}, -\sqrt{\frac{r_1^2+r_2^2}{2}}]$.
 $(\sqrt{\frac{r_1^2+r_2^2}{2}} - \frac{1}{4}, \sqrt{\frac{r_1^2+r_2^2}{2}} + \frac{1}{4}) \in]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]^2$ donc d'après le **lemme II.2**,
 $AJ_2^2 - AJ_1^2 = \frac{r_1^2+r_2^2}{2} + (\sqrt{\frac{r_1^2+r_2^2}{2}} - \frac{1}{4})^2 - \frac{r_1^2-r_2^2}{2} - (\sqrt{\frac{r_1^2+r_2^2}{2}} - \frac{1}{4})^2 =$
 $-\sqrt{\frac{r_1^2+r_2^2}{2}} < 0$.

Donc $AJ_1 > AJ_2$: contradictoire. Donc $f \neq s_1$.

-De même on montre que si $f = s_3$, $AI_1 > AI_2$ et si $f = r_2$, $AI_1 > AI_2$ et $AJ_1 > AJ_2$. Il reste donc $f = id$, c'est-à-dire $A = [\sqrt{\frac{r_1^2+r_2^2}{2}}, \sqrt{\frac{r_1^2+r_2^2}{2}}]$.

Corollaire

On voit que pour $(r_1, r_2) \in ([0; \frac{1}{2}[\mathbb{Q}]^2 - \{(0, 0); (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\})$, il existe un unique point A tel que $\mathbb{T}_2 \models F_{alg, r_1, r_2}[A]$.

On abrègera les $F_{alg, r_1, r_2}[a]$ en $a(|r_1, r_2|)$.

De plus, on fixe une énumération des formules $F_{rat, r_1, r_2}[a]$, $F_{alg, r_1, r_2}[a]$ qu'on notera $(F^n[a])_{n \in \mathbb{N}}$.

9) Une bijection

On définit plusieurs parties des espaces \mathbb{T}_2 et X :

$$-\mathcal{R}(\mathbb{T}_2) = \{A \in \mathbb{T} \mid \exists r_1, r_2 \in [-1; 1]_{\mathbb{Q}}, A(r_1, r_2)\} = \mathbb{Q}^2/\mathbb{Z}^2.$$

$$-\mathcal{A}(\mathbb{T}_2) = \{A \in \mathbb{T} \mid \exists (r_1, r_2) \in ([0; \frac{1}{2}[\mathbb{Q}]^2 - \{(0, 0); (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}), A(|r_1, r_2|)\}.$$

$$-\mathbb{T}'_2 = \mathcal{R}(\mathbb{T}_2) \cup \mathcal{A}(\mathbb{T}_2).$$

$$-\mathcal{R}(X) = \{x \in X \mid \exists r_1, r_2 \in [-1; 1]_{\mathbb{Q}}, x(r_1, r_2)\}.$$

$$-\mathcal{A}(X) = \{x \in X \mid \exists (r_1, r_2) \in ([0; \frac{1}{2}[\mathbb{Q}]^2 - \{(0, 0); (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}), x(|r_1, r_2|)\}.$$

$$X' = \mathcal{R}(X) \cup \mathcal{A}(X).$$

On munit ces ensembles des distances induites par celles de \mathbb{T}_2 et X .

Soit $A \in \mathbb{T}'$.

Il existe un entier n tel que $\mathbb{T}_2 \models F^n[A]$, et un unique élément $f(A) \in X'$ tel que $X' \models F^n[f(A)]$.

De plus pour $p \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbb{T}_2 \models F^p[A]$, on a $\mathbb{T}_2 \models \forall a(F^p[a] \implies F^n[a])$ donc $X \models \forall a(F^p[a] \implies F^n[a])$ donc $f(A)$ est l'unique image de A par f .

On définit ainsi une application $f : \mathbb{T}'_2 \rightarrow X'$.

Proposition 9.1

f est une bijection.

Preuve :

$\forall x \in X', \exists n \in \mathbb{N}, X \models F^n[x]$ et $\exists! A \in \mathbb{T}'_2, \mathbb{T}_2 \models F^n[A]$.

Proposition 9.2

$f : \mathbb{T}'_2 \hookrightarrow X'$.

Preuve :

★ - Plutôt de montrer directement que f est un 1-transfert, on montre que f vérifie $\forall(A, B, C, D), AB \leq CD \iff \delta_X(f(A), f(B)) \leq \delta_X(f(C), f(D))$, qui est une propriété plus forte.

Soient $(A, B), (C, D) \in \mathbb{T}_{2rat}^2$ tels que $AB \leq CD$.

Il existe des entiers naturels n_A, n_B, n_C, n_D tels que :

$\mathbb{T}_2 \models F^{n_A}[A] \wedge F^{n_B}[B] \wedge F^{n_C}[C] \wedge F^{n_D}[D]$.

On a aussi $\mathbb{T}_2 \models AB \equiv CD$ donc $\mathbb{T}_2 \models \forall(A, B, C, D)((F^{n_A}[A] \wedge F^{n_B}[B] \wedge F^{n_C}[C] \wedge F^{n_D}[D]) \implies F_{\leq}[A, B, C, D])$.

Il s'agit ici d'une formule clause de \mathcal{L}' , donc $X \models \forall(x, y, z, t)((F^{n_A}[x] \wedge F^{n_B}[y] \wedge F^{n_C}[z] \wedge F^{n_D}[t]) \implies F_{\leq}[x, y, z, t])$.

Or $X \models F^{n_A}[f(A)] \wedge F^{n_B}[f(B)] \wedge F^{n_C}[f(C)] \wedge F^{n_D}[f(D)]$

Donc $X \models F_{\leq}[f(A), f(B), f(C), f(D)]$.

C'est-à-dire que $\delta_X(f(A), f(B)) \leq \delta_X(f(C), f(D))$.

-On montre en reprenant le même raisonnement et en inversant X et \mathbb{T}_2 que $\forall(A, B, C, D) \in \mathbb{T}^4, \delta_X(f(A), f(B)) \leq \delta_X(f(C), f(D)) \implies AB \leq CD$

Donc f est un 1-transfert de \mathbb{T}' dans X' .

★ De la même manière, en remplaçant la formule F_{\leq} par $\neg \rightarrow$ dans la démonstration précédente, on obtient que f est un 2-transfert, donc un transfert.

III - Prolongement de f

10) Propriétés topologiques de f

Proposition 10.1

f et f^{-1} sont continues.

Preuve :

★ On a vu que f vérifiait $\forall(A, B, C, D) \in \mathbb{T}'_2^4, AB \leq CD \iff \delta_X(f(A), f(B)) \leq \delta_X(f(C), f(D))$.

Soit U un ouvert de X' .

Soit $A \in f^{-1}(U)$.

Il existe $r > 0$ tel que $B_X(f(A), r) \cap X' \subset U$.

Par densité de X' dans X , il existe $x \in B_X(f(A), r) \cap X' - \{f(A)\}$.

$x \neq f(A)$ donc $Af^{-1}(x) > 0$.

On pose $V = B(A, Af^{-1}(x)) \cap \mathbb{T}'_2$.

Soit $B \in V$.

$AB \leq Af^{-1}(x)$ donc $f(A)f(B) \leq f(A)x < r$.

Donc $f(B) \in B_X(f(A), r) \subset U$.

Ainsi $B \in f^{-1}(U) : V \subset f^{-1}(U)$.

C'est-à-dire que $f^{-1}(U)$ est un ouvert de $\mathbb{T}'_2 : f$ est continue.

★ La continuité de f^{-1} se démontre exactement de la même façon.

Proposition 10.2

La restriction g de f à $\mathcal{R}(\mathbb{T}_2)$ est uniformément continue.

Preuve :

★ Soit $\epsilon > 0$.
 $\exists r > 0, \forall A \in \mathcal{R}(\mathbb{T}_2), OA \leq r \implies \delta_X(g(O), g(A)) \leq \epsilon$.
 Soient $A, B \in \mathcal{R}(\mathbb{T}_2)$ tels que $AB \leq r$.
 $B - A = \tau_{-A}(B) \in \mathcal{R}(\mathbb{T}_2)$ car $\mathcal{R}(\mathbb{T}_2)$ est un sous-groupe de \mathbb{T} .
 $AB = \tau_{-A}(A)\tau_{-A}(B)$ donc $\delta_X(g(A), f(B)) = \delta_X(g(\tau_{-A}(A)), g(\tau_{-A}(B)))$.
 C'est-à-dire $\delta_X(g(A), f(B)) = \delta_X(g(O), f(B - A))$.
 $O(B - A) = AB \leq r$ donc $\delta_X(g(O), g(B - A)) \leq \epsilon$ donc $\delta_X(g(A), g(B)) \leq \epsilon$:
 g est uniformément continue.

11) Densité de $\mathcal{R}(X)$ dans X

Proposition 11

$\mathcal{R}(X)$ est dense dans X .

Preuve :

★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $A \in \mathbb{T}$ et soit $V_n = B_2(A, \frac{OI}{n})$.

On considère les $4n^2$ points rationnels définis pour $(i, j) \in [|1 - n; n|^2]$ par $A_{i,j} = [\frac{i}{2n}, \frac{j}{2n}]$.

Ce sont les points de $\mathcal{R}(\mathbb{T}_2)$ vérifiant $A_{i,j}(\frac{i}{n}, \frac{j}{n})$.

On écrit $A = [a_1, a_2]$ avec $(a_1, a_2) \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]^2$ et on pose $i_0, j_0 = \lfloor 2na_1 \rfloor, \lfloor 2na_2 \rfloor$.

$2na_1 - 1 < i_0 \leq 2na_1$ et $2na_2 - 1 < j_0 \leq 2na_2$. Donc $(i_0, j_0) \in [|1 - n; n|^2]$.

$AA_{i_0, j_0} \leq \|(a_1 - \frac{i_0}{2n}, a_2 - \frac{j_0}{2n})\|_2 \leq \|(a_1 - \frac{i_0}{2n}, a_2 - \frac{j_0}{2n})\|_1 \leq |a_1 - \frac{i_0}{2n}| + |a_2 - \frac{j_0}{2n}|$.

$\frac{i_0}{2n} \leq a_1 < \frac{i_0}{2n} + \frac{1}{2n}$ et $\frac{j_0}{2n} \leq a_2 < \frac{j_0}{2n} + \frac{1}{2n}$.

Ainsi $|a_1 - \frac{i_0}{2n}| + |a_2 - \frac{j_0}{2n}| < \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} : AA_{i_0, j_0} < \frac{1}{n}$.

Donc $A_{i_0, j_0} \in V_n$.

★ On pose $F_{\leq, n}[a, b] = \exists c(F_{int, n}[a, c, o, i] \wedge F_{\leq}[a, b, o, c])$.

Il est assez clair que cette formule code dans X et \mathbb{T}_2 le fait que la distance entre deux points x et y soit inférieure à $\frac{1}{n}\delta_X(o_X, i_X)$.

On a montré que pour tout entier naturel n strictement positif, la formule clause $F_{dense, n} = \forall a(\exists b(F_{\leq, n}[a, b] \wedge (\bigvee_{(i,j) \in [|1-n; n|^2]} b(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}))))$ est vérifiée par \mathbb{T}_2 ,

donc par X .

On en déduit que pour tout élément x de X , il existe un élément y de $\mathcal{R}(X)$ tel que $\delta_X(x, y) \leq \frac{1}{n}\delta_X(o_X, i_X)$.

Ainsi $\mathcal{R}(X)$ est dense dans X .

Corollaire

X' est dense dans X .

La fin de la preuve est trop longue pour le fichier *TeXworks* qui commence à fatiguer, elle se poursuit (et s'achève) dans *V bis - Preuve du théorème V*.

V bis - Preuve du théorème V

Théorème V version 1

Il existe un sous-espace dense E de \mathbb{T} et un transfert $E \hookrightarrow X$.

Preuve :

On considère le complété métrique $(\tilde{X}, \tilde{\delta}_X)$ de (X, δ_X) et l'injection canonique $\iota : X \rightarrow \tilde{X}$.

ι conserve les distances donc elle est uniformément continue.

$G = \iota \circ g$ est une application uniformément continue de $\mathcal{R}(\mathbb{T}_2)$ dans \tilde{X} qui est complet donc elle admet un unique prolongement uniformément continu \tilde{g} à $\overline{\mathcal{R}(\mathbb{T}_2)} = \mathbb{T}_2$.

On note ι^{-1} la réciproque de la bijection induite par ι .

ι conserve les distances donc ι^{-1} conserve les distances donc est uniformément continue sur $\iota(X)$

(i) définition de \tilde{f} et E

Soit $E = \tilde{g}^{-1}(\iota(X))$.

On pose $\tilde{f} = \left(\begin{array}{c} E \longrightarrow X \\ A \mapsto \iota^{-1}(\tilde{g}(A)) \end{array} \right)$

$\tilde{g}(E) \subset \iota(X)$ donc par composition, \tilde{f} est continue.

Soit $A \in \mathbb{T}'_2$.

$\tilde{g}(A) = G(A) = \iota(g(A))$ avec $g(A) \in X$ donc $A \in E$.

$\mathbb{T}'_2 \subset E$ donc E est dense dans \mathbb{T}_2 .

(ii) \tilde{f} coïncide avec f sur \mathbb{T}'_2 :

En effet, soit $A \in \mathbb{T}'_2$. Il existe une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{R}(\mathbb{T}_2)^{\mathbb{N}}$ qui converge vers A .

Par continuité de f , $(f(A_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(A)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$\tilde{g}(A_n) = G(A_n) = \iota(g(A_n)) = \iota(f(A_n))$.

On passe à la limite, par continuité de ι et $\tilde{g} : \tilde{g}(A) = \iota(f(A))$ puis $\tilde{f}f(A) = f(A)$ par injectivité de ι .

(iii) \tilde{f} est surjective :

En effet, soit $x \in X$. Il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ qui converge vers x .

On pose $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} = (f^{-1}(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$. Par continuité de f^{-1} , $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un élément A de \mathbb{T}_2 .

Par continuité de \tilde{f} , $\tilde{f}(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{f}(A_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(A_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$.

(on a utilisé **(ii)**)

(iv) \tilde{f} est un 1-transfert de E sur X :

★ Montrons que $\forall A, B, C, D \in E, AB = CD \implies \delta_X(\tilde{f}(A), \tilde{f}(B)) = \delta_X(\tilde{f}(C), \tilde{f}(D))$.

(la conservation des congruences en découle)

Soient $A, B, C, D \in E$ tels que $AB = CD$.

On écrit $B - A = [r_1, r_2]$ où les r_1, r_2 sont dans $[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}[$.

On pose $N = [\sqrt{\frac{r_1^2 + r_2^2}{2}}, \sqrt{\frac{r_1^2 + r_2^2}{2}}]$.

D'après deux utilisations du **lemme II.2**, $AB = ON$.

Soient $(A_n), (B_n) \in \mathcal{R}(\mathbb{T}_2)^{\mathbb{N}}$ convergeant respectivement vers A et B .

Pour $n \in \mathbb{N}$, on écrit $B_n - A_n = [r_{1,n}, r_{2,n}]$ avec $r_{1,n}, r_{2,n} \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}[$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $N_n = [\sqrt{\frac{r_{1,n}^2 + r_{2,n}^2}{2}}, \sqrt{\frac{r_{1,n}^2 + r_{2,n}^2}{2}}]$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Si $r_{1,n} = 0$ ou $r_{2,n} = 0$, $N = [|r_{1,n}|, |r_{1,n}|]$ ou $N = [|r_{2,n}|, |r_{2,n}|]$ satisfait $N(2|r_{1,n}|, 2|r_{1,n}|)$ ou $N(2|r_{2,n}|, 2|r_{2,n}|)$ d'après la **prop 4**.

Si $r_{1,n} = r_{2,n} = -\frac{1}{2}$ alors $N_n = [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ satisfait $N_n(1, 1)$.

Sinon, N satisfait $N(|r_{1,n}|, |r_{2,n}|)$ d'après la **prop 8**.

Dans tous les cas $N_n \in \mathbb{T}'_2$.

De plus, N_n vérifie $A_n B_n = O N_n$. (**lemme II.2**)

$(B_n - A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $B - A$ donc par l'absurde, $(|r_{1,n}|)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $|r_1|$. De même, $(|r_{2,n}|)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $|r_2|$.

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_{1,n}^2 = r_1^2$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_{2,n}^2 = r_2^2$.

Par continuité de φ , $\lim_{n \rightarrow +\infty} N_n = N$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$A_n B_n = O N_n$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, \delta_X(f(A_n), f(B_n)) = \delta_X(f(O), f(N_n))$.

Avec **(ii)**, $\forall n \in \mathbb{N}, \delta_X(\tilde{f}(A_n), \tilde{f}(B_n)) = \delta_X(\tilde{f}(O), \tilde{f}(N_n))$.

Par continuité de \tilde{f} , on passe à la limite : $\delta_X(\tilde{f}(A), \tilde{f}(B)) = \delta_X(\tilde{f}(O), \tilde{f}(N))$.

On reprend le même raisonnement pour les points C et D : en notant $D - C = [r'_1, r'_2]$, et $N' = [\sqrt{\frac{r'^2_1 + r'^2_2}{2}}, \sqrt{\frac{r'^2_1 + r'^2_2}{2}}]$, on a $CD = O N'$ donc $\delta_X(\tilde{f}(C), \tilde{f}(D)) = \delta_X(\tilde{f}(O), \tilde{f}(N'))$.

$\sqrt{\frac{r'^2_1 + r'^2_2}{2}} \in [0; \frac{1}{2}]$ donc $N' = O + \frac{O N'}{O M'} \cdot (M - O)$. (**prop II.3**)

$N' = \frac{CD}{OM} \cdot M$.

$N' = \frac{AB}{QM} \cdot M = \frac{ON}{OM} \cdot M = N$ (**prop II.3**) donc $\delta_X(\tilde{f}(A), \tilde{f}(B)) = \delta_X(\tilde{f}(O), \tilde{f}(N)) = \delta_X(\tilde{f}(O), \tilde{f}(N')) = \delta_X(\tilde{f}(C), \tilde{f}(D))$.

★ Montrons que $\forall A, B, C, D \in E, AB \neq CD \implies \delta_X(\tilde{f}(A), \tilde{f}(B)) \neq \delta_X(\tilde{f}(C), \tilde{f}(D))$.
 Soient $A, B, C, D \in E$ tels que $AB \neq CD$.
 Par exemple $AB < CD$. (l'autre cas est symétrique)
 Alors $0 \leq \frac{AB}{CD} < 1$. Soit $r \in \frac{AB}{CD}; 1[\cap \mathbb{Q}$.
 Soient $(A_n), (B_n), (C_n), (D_n) \in \mathbb{T}'_2^{\mathbb{N}}$ convergeant respectivement vers A, B, C, D .
 Il existe un entier naturel N tel que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies A_n B_n \leq r C_n D_n$;
 sinon en extrayant des sous-suites on obtiendrait l'absurdité $AB \geq r CD > AB$.
 Soit $n \geq N$.
 On reconnait ici la formule $F_{\leq, r}[A_n, B_n, C_n, D_n]$. f est un transfert de \mathbb{T}'_2 sur X' donc un isomorphisme de \mathcal{L}' -structures, donc $X \models F_{\leq, r}[f(A_n), f(B_n), f(C_n), f(D_n)]$.
 Avec (ii), $\forall n \geq N, \delta_X(\tilde{f}(A_n), \tilde{f}(B_n)) \leq r \delta_X(\tilde{f}(C_n), \tilde{f}(D_n))$ et en passant à la limite,
 $\delta_X(\tilde{f}(A), \tilde{f}(B)) \leq r \delta_X(\tilde{f}(C), \tilde{f}(D)) < \delta_X(\tilde{f}(C), \tilde{f}(D))$.
 En particulier, $\delta_X(\tilde{f}(A), \tilde{f}(B)) \neq \delta_X(\tilde{f}(C), \tilde{f}(D))$.

★ On en déduit que \tilde{f} conserve les congruences, puis qu'elle est injective et donc que c'est un 1-transfert $E \hookrightarrow X$.

(v) - Soit $(A, B, C) \in E^3$ tel que $AB + BC = AC$.
 Si $A = C$ alors $B = A = C$ et $\tilde{f}(A) = \tilde{f}(B) = \tilde{f}(C)$ donc $\overline{\tilde{f}(A)\tilde{f}(B)\tilde{f}(C)}_X$.
 Sinon, $AC \neq 0$.
 $\exists f \in \mathcal{GL}(\mathbb{T}_2)$ telle que $B = A + \sigma(\frac{AB}{AC} \cdot (A - C))$. (**prop II.3**)
 Si $C = A + [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.
 Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{R}(\mathbb{T}_2)$ convergeant vers A .
 Soit $(q_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $\frac{AB}{AC}$ par valeurs inférieures.
 - Si $C = A + [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, on pose pour tout $n \in \mathbb{N}, C_n = A_n + [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ et $B_n = A_n + \sigma((q_n \cdot (A_n - C_n)))$
 - S'il existe $x_2 \in]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}[$ tel que $C = A + [\frac{1}{2}, x_2]$, on considère une suite $(x_{2,n}) \in]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}[\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ qui converge vers x_2 et on pose pour $n \in \mathbb{N}, C_n = A_n + [\frac{1}{2}, x_{2,n}]$ et $B_n = A_n + \sigma((q_n \cdot (A_n - C_n)))$.
 - S'il existe $x_1 \in]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}[$ tel que $C = A + [x_1, \frac{1}{2}]$, on considère une suite $(x_{1,n}) \in]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}[\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ qui converge vers x_1 et on pose pour $n \in \mathbb{N}, C_n = A_n + [x_{1,n}, \frac{1}{2}]$ et $B_n = A_n + \sigma((q_n \cdot (A_n - C_n)))$.
 - Sinon, il existe $x_1, x_2 \in]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}[$ tels que $C = A + [x_1, x_2]$, on considère deux suites $(x_{1,n}), (x_{2,n}) \in]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}[\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ qui convergent respectivement vers x_1, x_2 et on pose pour $n \in \mathbb{N}, C_n = A_n + [x_{1,n}, x_{2,n}]$ et $B_n = A_n + \sigma((q_n \cdot (A_n - C_n)))$.
 D'après la réciproque de **prop II.3**, dans chaque cas, pour tout entier naturel n $A_n B_n + B_n C_n = A_n C_n$.
 Par continuité de $\varphi_{\mathbb{T}_2}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = A, \lim_{n \rightarrow +\infty} C_n = C$

Par continuité de σ et de la loi \cdot sur $[0, 1] \times \mathbb{T}_2$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} B_n = B$.

De plus pour $n \in \mathbb{N}$, A_n et C_n sont dans $\mathcal{R}(\mathbb{T}_2)$ et q_n étant rationnel, $B_n \in \mathcal{R}(\mathbb{T}_2)$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\overline{f(A_n)f(B_n)f(C_n)}_X$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\overline{\tilde{f}(A_n)\tilde{f}(B_n)\tilde{f}(C_n)}_X$.

En passant à la limite, on obtient $\overline{\tilde{f}(A)\tilde{f}(B)\tilde{f}(C)}_X$.

-Soit $(A, B, C) \in E^3$ tel que $AB+BC > AC$. Montrons que $\delta_X(\tilde{f}(A), \tilde{f}(B)) + \delta_X(\tilde{f}(B), \tilde{f}(C)) > \delta_X(\tilde{f}(A), \tilde{f}(C))$.

On va pour cela utiliser une famille de formules $(F_{\text{decalage}, r}[a, b, c])_{r \in [1; 2]_{\mathbb{Q}}}$ telles que $\forall r \in [1; 2]_{\mathbb{Q}} \forall x, y, z \in X$:

$$(X \models F_{\text{decalage}, r}[x, y, z]) \iff (\delta(x, y)_X + \delta(y, z)_X \geq r\delta_X(x, z)). \quad (1)$$

Pour $r \in \mathbb{Q}_+$, $1 \leq r \leq 2$, on pose $F_{\text{decalage}, r}[a, b, c] = \exists d(\exists e(\exists f(\overline{def} \wedge F_{\text{rat}, \frac{1}{2r}}[d, e, a, b] \wedge F_{\text{rat}, \frac{1}{2r}}[e, f, b, c] \wedge F_{\geq, \frac{1}{2}}[d, e, a, c])))$.

Où la formule $F_{\geq, q}[d, f, a, c]$ est (pour $q \in [0; 1]_{\mathbb{Q}}$) $\exists g(\exists h(F_{\text{rat}, q}[d, f, g, h] \wedge F_{\leq}[g, h, d, f]))$.

Il est assez clair que cette formule signifie (dans X et \mathbb{T}_2) que la distance entre les interprétations de d et f est supérieure à la moitié de celle entre les interprétations de a et c .

Pour ce qui est de l'équivalence (1), notons que pour $r \in [1; 2]_{\mathbb{Q}}$, pour tous points $A, B, C \in \mathbb{T}$, il existe des points D, E, F vérifiant $DE = \frac{1}{2r}AB$ et $EF = \frac{1}{2r}BC$ ainsi que $DE + EF = DF$.

Il suffit de poser $D = O$, $E = \frac{AB}{\sqrt{2r}} \cdot [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ et $F = E + \frac{BC}{\sqrt{2r}} \cdot [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, de remarquer que $\frac{AB}{\sqrt{2r}}, \frac{BC}{\sqrt{2r}} \in [0; 1]$ et d'appliquer la **prop II.2** ainsi que la **prop II.3**.

Donc $\forall a(\forall b(\exists d(\exists e(\exists f(\overline{def} \wedge F_{\text{rat}, \frac{1}{2r}}[d, e, a, b] \wedge F_{\text{rat}, \frac{1}{2r}}[e, f, b, c])))$ est un théorème de \mathbb{T}_2 donc de X .

Soit $(x, y, z) \in X^3$. D'après ce qui précède, il existe u, v, w satisfaisant les conditions ci-dessus.

$$\delta_X(u, w) = \delta_X(u, v) + \delta_X(v, w) = \frac{1}{2r}(\delta(x, y)_X + \delta(y, z)_X).$$

Donc $\delta(x, y)_X + \delta(y, z)_X \geq r\delta_X(x, z) \iff \delta_X(u, w) \geq \frac{1}{2}\delta_X(x, z)$: ce qu'il fallait démontrer.

On rappelle que $AB + BC > AC$.

-Si $A = C$ alors $B \neq A$ donc par injectivité de \tilde{f} , $\tilde{f}(B) \neq \tilde{f}(A)$ et $\delta_X(\tilde{f}(A), \tilde{f}(B)) + \delta_X(\tilde{f}(B), \tilde{f}(A)) > 0 = \delta_X(\tilde{f}(A), \tilde{f}(A))$.

-Sinon, on pose $R = \text{Min}(2, \frac{AB+BC}{AC})$. $R \in]1; 2]$ donc il existe $r \in]1; R[_{\mathbb{Q}}$.

Soient $(A_n), (B_n), (C_n)$ trois suites d'éléments de \mathbb{T}'_2 convergeant respectivement vers A, B, C .

$\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n B_n + B_n C_n = AB + BC \geq RAC = \lim_{n \rightarrow +\infty} R A_n C_n$ donc $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$, $A_n B_n + B_n C_n \geq R A_n C_n$.

C'est-à-dire $\forall n \geq N$, $\mathbb{T}'_2 \models F_{\text{decalage}, r}[A_n, B_n, C_n]$.

f étant un transfert $\mathbb{T}'_2 \rightarrow X'$, $\forall n \geq N$, $X' \models F_{\text{decalage},r}[f(A_n), f(B_n), f(C_n)]$,
soit $\forall n \geq N$, $\delta_X(f(A_n)f(B_n)) + \delta_X(f(B_n)f(C_n)) \geq r\delta_X(f(A_n)f(C_n))$.

Donc $\forall n \geq N$, $\delta_X(\tilde{f}(A_n), \tilde{f}(B_n)) + \delta_X(\tilde{f}(B_n), \tilde{f}(C_n)) \geq r\delta_X(\tilde{f}(A_n), \tilde{f}(C_n))$.
(encore avec **(ii)**)

On passe à la limite par continuité de \tilde{f} :

$$\delta_X(\tilde{f}(A), \tilde{f}(B)) + \delta_X(\tilde{f}(B), \tilde{f}(C)) \geq r\delta_X(\tilde{f}(A), \tilde{f}(C)) > \delta_X(\tilde{f}(A), \tilde{f}(C))$$

\tilde{f} est un 2-transfert, donc un transfert de E sur X .

Théorème V version 2

Si X est compact ou complet alors $\mathbb{T}_2 \hookrightarrow X$.

Preuve :

Si X est compact, il est complet ; on traite le cas où X est complet.

Alors $\iota(X) = \tilde{X}$ et $E = \tilde{g}^{-1}(\iota(X)) = \mathbb{T}_2$.

Corollaire

Les tores algébriques possédant la même géométrie que \mathbb{T}_2 lui sont isométriques à une constante multiplicative près. (une caractérisation plus précise est donnée dans le **théorème IV.1**)

Conclusion du V

Cette partie un peu à part dans le TIPE mérite des commentaires informels au sujet des résultats et de leur interprétation.

Commentaires

Il est remarquable que parmi les espaces métriques compacts, les tores sont les seuls modèles potentiels de la géométrie de \mathbb{T}_2 . Par exemple, on ne retrouvera jamais la même géométrie sur une sphère.

Le tore euclidien se présente comme l'analogie torique du plan euclidien par sa position au sein de la classe des espaces métriques compacts vus comme des réalisations de \mathcal{L} , puisque ceux qui lui sont élémentairement équivalents s'y plongent.

Pour cette raison, on peut considérer que la géométrie du tore euclidien possède une structure algébrique-topologique propre.

Questions ouvertes :

D'après le corollaire, la géométrie de \mathbb{T}_2 induit une structure algébrique forte sur un tore algébrique $\mathbb{T}_{\parallel \parallel}$ puisqu'elle conduit à l'existence d'une application

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : \mathbb{T}_2 \rightarrow \mathbb{T}_{\parallel \parallel} \text{ qui multiplie les distances par une constante.}$$

On peut se demander s'il en est de même de la géométrie de \mathbb{T}_∞ ou de celle d'un tore algébrique quelconque.

Le fait que ces géométries puissent se distinguer par des énoncés simples (nombre de milieux limité ou non par exemple) laisse penser que ce n'est pas le cas ou du moins que la démonstration d'un tel fait serait plus difficile à mener que celle du cas du tore euclidien.

Faute de méthode, je n'ai pas pu proposer des espaces métriques non complets possédant la même géométrie que \mathbb{T}_2 .

Plusieurs faits indiquent pourtant que c'est le cas :

-les propriétés de compacité, complétude, non dénombrabilité, borne supérieure/inférieure sont en général du second ordre.

-la géométrie euclidienne élémentaire, qui semble présenter des analogies avec la géométrie de \mathbb{T}_2 , admet des modèles qui ne sont pas complets

Il m'aurait pour cela fallu pour pouvoir envisager de répondre à cette question disposer d'une théorie synthétique de la géométrie de \mathbb{T}_2 , c'est-à-dire d'un ensemble "sympathique" de formules de \mathcal{L} permettant de démontrer tous les théorèmes de \mathbb{T}_2 .

Il est possible d'obtenir un tel ensemble en regroupant toutes les formules apparaissant dans ce fichier PDF ainsi que dans "V - Géométrie du tore eucli-

dien", mais le résultat serait assez confus dans la mesure où nombre d'entre elles ont été posées pour répondre à des problèmes précis et on été choisies de manière pragmatique plutôt que parce qu'elles exprimaient une propriété géométrique fondamentale de \mathbb{T}_2 .

Une autre idée qui serait de s'inspirer de la théorie de la géométrie euclidienne élémentaire telle qu'axiomatisée par Tarski n'est pas facile à mettre en place, car la majorité des axiomes de cette dernière sont vérifiés dans \mathbb{T}_2 et ceux qui ne le sont pas ne semblent pas posséder une "version torique" naturelle.

En résumé, le travail d'abstraction que demanderait une telle tâche est d'un autre niveau que celui effectué ici.

J'ai manqué de temps pour caractériser plus précisément E . Mon idée est que E est toujours de la forme K^2/\mathbb{Z}^2 où K est un corps réel clos.

En effet, les modèles de la géométrie euclidienne élémentaire sont tous des plans cartésiens paramétrés par un corps réel clos. Je n'ai pas lu de démonstration détaillée de ce fait mais il est indiqué dans que cela se montre en construisant petit à petit des opérations sur l'ensemble de base du modèle en les introduisant via des droites. Ceci utilise des résultats non triviaux concernant la théorie des corps réels clos et la théorie des proportions.

En ajoutant à ceci les difficultés dues au caractère borné de \mathbb{T}_2 et au passage au quotient par \mathbb{Z}^2 (j'ai pu constater qu'il oblige parfois à faire des disjonctions de cas lourdes qu'il faut mener avec prudence), on peut imaginer que la démonstration si elle existe n'est pas facile à mettre en place.

Contrairement aux travaux menés sur la théorie de la géométrie euclidienne élémentaire, ma démarche dépend de l'existence d'un lien préalable et choisi "arbitrairement" entre les relations géométriques et une distance. (sans ce lien je n'aurais pas pu utiliser les arguments de nature topologique)

Je ne sais pas si le résultat du théorème V tient encore pour un modèle $(X, \equiv_X, \dashv\dashv_X)$ quelconque de $Th(\mathbb{T}_2)$.

Je n'ai pas lu d'articles présentant ce genre de construction donc il m'est difficile de me faire une idée. Une voie serait peut-être de définir la distance sur un des segments $[u, v]$ où ce couple de point est parmi ceux de X à vérifier $\forall x(\forall y(\exists z(\overline{uzv}_X \wedge uz \equiv_X xy)))$ (par exemple $(u, v) = (o_X, m_X)$ présentés précédemment), en posant $\delta(u, v) = 1$, $\delta(u, w) = \frac{1}{2}$ si w satisfait la formule $F_{milieu}[u, v, w]$, $\delta(u, w') = \frac{1}{4}$ si w satisfait la formule $F_{milieu}[u, v, w]$, et w' satisfait $F_{milieu}[u, w, w']$, etc...

On prolongerait la distance à tous les points w vérifiant \overline{uvw}_X en considérant des suites de formules indexées par l'ensemble des nombres diadiques entre 0 et 1, puis à X tout entier en ramenant la distance entre deux points quelconques x, y à celle entre u et un point z satisfaisant $uz \equiv_X xy$.

Reste à savoir si cette définition construit véritablement une distance, si celle-ci est liée comme attendu aux relations géométriques et si sa définition est

8

efficace pour montrer tout cela. Il va sans dire que j'ai également manqué de temps pour répondre à cette question.

Note additionnelle

Cette note a été rajoutée après la présentation du TIPE aux concours, elle reprend le dernier commentaire figurant dans la liste des "questions ouvertes" ci-dessus et précise le théorème V.

Théorème V.bis.bis

Soit $\mathcal{X} = (X, \equiv_X, \dashv\dashv_X)$ un modèle de la géométrie de \mathbb{T}_2 . Les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) Il existe un plongement $\mathcal{X} \rightarrow \mathbb{T}_2$.
- (ii) Il existe une distance δ_X sur X telle que \mathcal{X} est la \mathcal{L} -structure associée à (X, δ_X) .

De plus l'une de ces propositions est vérifiée, alors pour toute distance δ_X induisant les relations géométriques, il existe un plongement $\mathcal{X} \rightarrow \mathbb{T}_2$ dont l'image est dense dans \mathbb{T}_2 et qui multiplie les distances par une constante strictement positive.

Preuve :

L'équivalence de (i) et (ii) est essentiellement conséquence du **théorème V** :

S'il existe un tel plongement f , on peut définir sur X la distance initiale $\delta_X(x, y) = f(x)f(y)$, on montre facilement que cette distance induit \mathcal{X} .

L'autre implication est une version faible du **théorème V**.

Pour prouver la dernière partie, on considère un modèle \mathcal{X} qu'on munit de la distance δ_X en question, et on commence par le lemme suivant :

lemme :

Soit m un entier naturel non nul.

La formule $F_{distance, n} = \forall(a, b)(\exists!(a', c, d)((\bigvee_{k=0}^{2^{m-1}-1} (c(|\frac{k}{2^m}, \frac{k}{2^m}|) \wedge d(|\frac{k+1}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}|))) \wedge ab \equiv oa' \wedge \overline{ca'd} \wedge (a' = d \implies a' = m))))$
est un théorème de \mathbb{T}_2 .

Preuve :

★ Existence :

Soit n un entier naturel, soient $A, B \in \mathbb{T}_2$.

On écrit $B - A = [x_1, x_2]$ avec $(x_1, x_2) \in]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]^2$.

On pose $\alpha = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}}$ et $A' = [\alpha, \alpha]$

$\alpha \in [0; \frac{1}{2}]$. D'après le **lemme II.2**, $OA' = AB$.

Soit $k = \lfloor 2^m \alpha \rfloor$. $\frac{k}{2^m} \in [0; \frac{1}{2}] \cap \mathbb{Q}$.

-Si $\frac{k}{2^m} = \frac{1}{2}$, on note respectivement C et D les uniques points de \mathbb{T}_2 à vérifier $C(|\frac{k-1}{2^m}, \frac{k-1}{2^m}|)$ et $D(|\frac{k}{2^m}, \frac{k}{2^m}|)$.

Alors $\alpha = \frac{1}{2}$ donc $A' = D = M$.

$$CA' + A'D = CD + DD = CD.$$

-Sinon, $k < 2^{m-1}$ donc $k \in [0; 2^{m-1} - 1]$.

On note respectivement C et D les points de \mathbb{T}_2 vérifiant $C(|\frac{k}{2^m}, \frac{k}{2^m}|)$, $D(|\frac{k+1}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}|)$.

$(C, D) = ([\frac{k}{2^m}, \frac{k}{2^m}], [\frac{k+1}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}])$ et d'après le **lemme II.2** et les inégalités $|\frac{k}{2^m} - \alpha|, |\frac{k}{2^m} - \alpha| \leq \frac{1}{2^m} \leq \frac{1}{2}$,

$$CA' + A'D = \sqrt{2(\frac{k}{2^m} - \alpha)^2} + \sqrt{2(\frac{k+1}{2^m} - \alpha)^2}.$$

De même, d'après l'inégalité $|\frac{k+1}{2^m} - \frac{k}{2^m}| \leq \frac{1}{2^m} \leq \frac{1}{2}$ et le **lemme II.2**,

$$CD = \sqrt{2(\frac{k+1}{2^m} - \frac{k}{2^m})^2}.$$

Soit $CA' + A'D = CD$. De plus on a bien $A' = D \implies A' = M$ puisque $A' \neq D$.

★ Unicité :

On suppose l'existence d'un autre triplet A'', C', D' satisfaisant les conditions.

$\overline{OC'M}$ et $\overline{OD'M}$ et $\overline{C'A''D'}$ donc $\overline{OC'A''}$ et $\overline{OA''D'}$, puis $\overline{OA''M}$.

D'après la **prop II.3**, il existe $\sigma \in \{id, r_2, r_3, s_4\}$ telle que $A'' = \sigma(A') = \sigma([\alpha, \alpha])$.

Si $A' = O$ ou $A' = M$, $A'' = A'$, $C' = C$ et $D' = M$.

Sinon, $0 < \alpha < \frac{1}{2}$. En notant $C', D' = [\frac{k'}{2^m}, \frac{k'}{2^m}], [\frac{k'+1}{2^m}, \frac{k'+1}{2^m}]$ où k' est un entier naturel strictement inférieur à 2^{m-1} , on peut vérifier que $C'A'' + A''D' = C'D' \implies \sigma = id$ et $k = k'$.

Donc $C' = C$ et $D' = D$.

Fin de la preuve du lemme.

On déduit de ce qui précède que les $F_{distance, n}$ sont des théorèmes de X .

Soit $m \in \mathbb{N}$, soit $k \in \mathbb{N}$, $k \leq 2^{m-1}$. On note x_k l'unique point de X à vérifier $x_k(|\frac{k}{2^m}, \frac{k}{2^m}|)$.

On pose $\delta(o_X, x_k) = \frac{k}{2^{m-1}}$.

Pour tout couple de points x, y de X , on définit deux suites $(c(x, y)_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$, $(d(x, y)_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$ vérifiant les conditions de la formule.

Les suites $(\delta(o_X, c(x, y)_m))_{m \in \mathbb{N}^*}$ et $(\delta(o_X, d(x, y)_m))_{m \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

En effet, la preuve du lemme montre que pour tout entier naturel $m > 0$, $\delta(o_X, d(x, y)_m) = \delta(o_X, c(x, y)_m) + \frac{1}{2^{m-1}}$.

De plus, en reprenant les notations de la preuve du lemme, $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $\delta(o_X, c(x, y)_m) = \frac{[2^m \alpha]}{2^m}$

$$\delta(o_X, c(x, y)_{m+1}) - \delta(o_X, c(x, y)_m) = \frac{\lfloor 2^{m+1}\alpha \rfloor}{2^{m+1}} - \frac{\lfloor 2^m\alpha \rfloor}{2^m} = \frac{\lfloor 2^{m+1}\alpha \rfloor - 2\lfloor 2^m\alpha \rfloor}{2^{m+1}} \geq 0.$$

Donc $(\delta(o_X, c(x, y)_m))_{m \in \mathbb{N}^*}$ est croissante. On montre de façon similaire que $(\delta(o_X, c(x, y)_m))_{m \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

On pose $\delta(x, y) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \delta(o_X, c(x, y)_m)$.

★ $\delta_X = \delta_X(o_X, m_X)\delta$.

En effet, soit $(x, y) \in X^2$.

On considère le triplet $(z, (c(x, y)_m)_{m \in \mathbb{N}^*}, (d(x, y)_m)_{m \in \mathbb{N}^*})$ associé aux formules $F_{\text{distance}, m}$, $m \in \mathbb{N}^*$.

Soit $m \in \mathbb{N}^*$.

Il existe un entier naturel $k < 2^{m-1}$ tel que $c(x, y)_m = x_k$.

La formule $\forall a(\lfloor \frac{k}{2^m}, \frac{k}{2^m} \rfloor) \implies \exists (a_1, \dots, a_k)(oa_1 \equiv a_1a_2 \equiv \dots \equiv a_{k-1}a \wedge \overline{oa_1a_2} \wedge \overline{oa_2a_3} \wedge \dots \wedge \overline{oa_{k-1}a})$ est un théorème de \mathbb{T}_2 (poser $A_i = \lfloor \frac{i}{2^m}, \frac{i}{2^m} \rfloor$ pour $1 \leq i \leq k-1$) donc de X , on en déduit comme dans le paragraphe 3) de la partie V que $\delta_X(o_X, c(x, y)_m) = \frac{k}{2^{m-1}}\delta_X(o_X, m_X) = \delta_X(o_X, m_X)\delta(o_X, c(x, y)_m)$.

$$\delta_X(x, y) = \delta_X(o_X, z)$$

Dans (X, δ_X) , la suite $(c(x, y)_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$ converge vers z , car pour tout entier naturel non nul m , $\delta_X(c(x, y)_m, z) \leq \delta_X(c(x, y)_m, d(x, y)_m) \leq \frac{1}{2^m}\delta_X(o_X, m)$.

$$\text{Donc } \delta_X(o_X, z) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \delta_X(o_X, c(x, y)_m) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \delta_X(o_X, m_X)\delta(o_X, c(x, y)_m) = \delta_X(o_X, m_X)\delta(x, y).$$

Finalement, $\delta_X(x, y) = \delta_X(o_X, m_X)\delta(x, y)$.

Avec le **théorème V**, il existe une partie dense E de \mathbb{T}_2 et un transfert $\tilde{f} : E \hookrightarrow X$.

★ Montrons que \tilde{f} est une isométrie de E dans $(X, \frac{\sqrt{2}}{2\delta_X(o_X, m_X)}\delta_X)$.

Soit $(A, B) \in E^2$.

Notons qu'en appliquant ce qui précède à $X = E$ et en notant δ_2 la distance ainsi construite, on a $\delta_E = \frac{\sqrt{2}}{2}\delta_2$ où δ_E est la distance sur \mathbb{T}_2 restreinte à E^2 .

Soient $(A', (C(A, B)_m)_{m \in \mathbb{N}^*}, (D(A, B)_m)_{m \in \mathbb{N}^*})$ le triplet associé à (A, B) dans la définition de $\delta_2(A, B)$.

\tilde{f} étant un transfert de E vers X , d'après **prop I.2**, $(z, (c(A, B)_m)_{m \in \mathbb{N}^*}, (d(A, B)_m)_{m \in \mathbb{N}^*}) = (\tilde{f}(A'), (\tilde{f}(C(A, B)_m))_{m \in \mathbb{N}^*}, (\tilde{f}(D(A, B)_m))_{m \in \mathbb{N}^*})$ est celui associé à $(\tilde{f}(A), \tilde{f}(B))$ dans X .

$$\frac{\sqrt{2}}{2\delta_X(o_X, m_X)}\delta_X(\tilde{f}(A), \tilde{f}(B)) = \frac{\sqrt{2}}{2\delta_X(o_X, m_X)}\delta_X(o_X, z) = \frac{\sqrt{2}}{2}\delta(o_X, z) = \frac{\sqrt{2}}{2} \lim_{m \rightarrow +\infty} \delta(o_X, \tilde{f}(C(A, B)_m)).$$

Or pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, \tilde{f} étant un transfert, $\tilde{f}(C(A, B)_m)$ possède vérifie la même formule de coordonnées que $C(A, B)_m$, d'où l'égalité $\delta(o_X, \tilde{f}(C(A, B)_m)) = \delta_2(O, C(A, B)_m)$.

En passant à la limite, $\frac{\sqrt{2}}{\delta_X(o_X, m_X)} \delta_X(\tilde{f}(A), \tilde{f}(B)) = \frac{\sqrt{2}}{2} \delta_2(A, B) = \delta_E(A, B)$:
C.Q.F.D.

La proposition suivante montre qu'il n'est pas possible de se passer de l'existence d'une métrique sur X compatible avec les relations $\equiv_X, \dashv\dashv_X$ dans le résultat du théorème V.

Proposition

Il existe un modèle X de la géométrie du tore euclidien qui ne se plonge pas dans \mathbb{T}_2 .

Preuve

On fait l'axiome du choix.

Soit U un ultrafiltre de \mathbb{N} contenant le filtre de Fréchet. On note ${}^*\mathbb{T}_2$ l'ultrapuissance de $(\mathbb{T}_2, \equiv_{\mathbb{T}_2}, \dashv\dashv_{\mathbb{T}_2})$ modulo U .

${}^*\mathbb{T}_2$ possède les mêmes propriétés géométriques que \mathbb{T}_2 .

On suppose que ${}^*\mathbb{T}_2$ se plonge dans \mathbb{T}_2 via g .

On pose $E = g({}^*\mathbb{T}_2)$ et $f = (g|_E)^{-1}$.

f est un transfert $E \leftrightarrow {}^*\mathbb{T}_2$.

Dans \mathbb{T}_2 (donc dans E), pour tout quadruplet de points (A, B, C, D) , il existe un entier naturel n non nul tel que $\frac{1}{n}AB \leq CD$, (poser $n = 1$ si $C = D$, $n = 1 + \lceil \frac{AB}{CD} \rceil$ sinon) et ceci est codé dans E par la formule $F_{Archimede, n}[a, b, c, d] = \exists(a_1, \dots, a_n)(\overline{ca_1d} \wedge \overline{ca_1a_2} \wedge \dots \wedge \overline{ca_{n-1}a_n} \wedge ca_1 \equiv \dots \equiv a_{n-1}a_n \wedge ca_n \equiv ab)$.

On en déduit que c'est le cas pour le quadruplet points $({}^*O, {}^*I, {}^*O, {}^*A)$ de ${}^*\mathbb{T}_2$ où ${}^*O = [([0, 0])_{p \in \mathbb{N}}]$, ${}^*I = [([\frac{1}{2}, 0])_{p \in \mathbb{N}}]$, ${}^*A = [([\frac{1}{p+1}, 0])_{p \in \mathbb{N}}]$, puisque c'est le cas pour $(f^{-1}({}^*O), f^{-1}({}^*I), f^{-1}({}^*O), f^{-1}({}^*A))$, et d'après la **prop 1.2**.

Soit n un tel entier.

Notons que ${}^*A = [([Min(\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{p+1}), 0])_{p \in \mathbb{N}}]$.

$\{p \in \mathbb{N} \mid \mathbb{T}_2 \models F_{Archimede, n}[[0, 0], [\frac{1}{2}, 0], [0, 0], [\frac{1}{3n+p}, 0]]\} \in U$ donc cet ensemble est non vide : $\exists p \in \mathbb{N}, \mathbb{T}_2 \models F_{Archimede, n}[[0, 0], [\frac{1}{2}, 0], [0, 0], [Min(\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{p+1}), 0]]$.

Soit $A_p = [Min(\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{p+1}), 0]$

On a donc $\frac{1}{n}OI \leq OA_p$, soit $\frac{1}{2n} \leq Min(\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{p+1}) \leq (\frac{1}{2n+1} < \frac{1}{2n}$: contradictoire.

Ainsi ${}^*\mathbb{T}_2$ ne se plonge pas dans \mathbb{T}_2 .

On peut noter que la construction de la pseudo-distance δ sur ${}^*\mathbb{T}_2$ n'aboutit pas à une distance, en effet δ ne sépare pas dans ${}^*\mathbb{T}_2$ les points *O et *A .

Les modèles non métrisables de la géométrie de \mathbb{T}_2 sont tous non archimédiens au sens où ils admettent des segments incommensurables.